
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Autres solutions des mêmes problèmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 83-88

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__83_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Autres solutions des mêmes problèmes ;

Par M. GERGONNE.



PROBLÈME I. *Par un point donné dans un angle donné, et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée aux deux côtés de l'angle, de telle sorte que ce point la divise en deux segmens dont la somme des quarrés soit équivalente à une surface donnée ?*

Solution. On voit d'abord que si la droite cherchée n'est point

84 PROBLÈMES DU CONCOURS

perpendiculaire à celle qui joint le point donné au sommet de l'angle donné , il pourra y avoir deux solutions du problème dans cet angle même. De plus , si la surface donnée est plus grande que le carré construit sur la droite qui joint le point donné au sommet de l'angle donné , il y aura encore une solution dans chacun des deux suppléments de l'angle donné. Ainsi , le problème peut avoir quatre solutions , et pas davantage.

Mais , comme , en menant une droite indéfinie par le point donné et par le sommet de l'angle donné , tout se trouve symétrique par rapport à cette droite ; il est facile de prévoir que , bien que du 4.^e degré , ce problème ne doit présenter réellement que la difficulté du second.

Soient XOY (fig. 9) l'angle donné ; P le point donné , également distant de ses deux côtés ; AB une droite menée par P qui résout le problème ; et b le côté d'un carré constant auquel doit être équivalente la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ des carrés des deux segmens PA , PB.

Soit pris l'angle XOY pour angle des coordonnées positives ; représentons cet angle par γ ; soient les deux coordonnées du point P égales à a ; l'équation de la droite AB sera de la forme

$$\gamma - a = M(x - a) ; \tag{1}$$

M étant un coefficient inconnu qu'il s'agit de déterminer conformément à la condition du problème.

Si , dans cette équation , on fait successivement γ et x égaux à zéro , les valeurs qui en résulteront pour x et γ seront celles des segmens OA , OB ; on trouvera ainsi

$$OA = -\frac{1-M}{M}a , \quad OB = +(1-M)a ;$$

en conséquence , et d'après la formule qui donne le carré de la

DES COLLÈGES ROYAUX DE PARIS. 85
 distance entre deux points, dans le cas des coordonnées obliques, on trouvera facilement

$$\overline{PA}^2 = \frac{a^2}{M^2}(1+2M\cos.\gamma+M^2), \quad \overline{PB}^2 = a^2(1+2M\cos.\gamma+M^2);$$

puis donc qu'on doit avoir

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = b^2$$

l'équation qui devra déterminer M sera

$$a^2 \left(\frac{1}{M^2} + 1 \right) (1 + 2M\cos.\gamma + M^2) = b^2,$$

ou bien

$$a^2(1+M^2)(1+2M\cos.\gamma+M^2) = b^2M^2. \quad (2)$$

Cette équation développée devient

$$a^2M^4 + 2a^2M^3\cos.\gamma + (2a^2 - b^2)M^2 + 2a^2M\cos.\gamma + a^2 = 0;$$

équation complète du quatrième degré; mais qui, étant réciproque, ne comporte que la difficulté du second. Rien ne serait plus facile d'ailleurs que de se rendre raison de cette circonstance.

En divisant donc tous les termes de cette équation par M^2 , elle prendra cette forme

$$a^2 \left(M^2 + \frac{1}{M^2} \right) + 2a^2 \left(M + \frac{1}{M} \right) \cos.\gamma + (2a^2 - b^2) = 0;$$

et ensuite celle-ci

$$a^2 \left(M + \frac{1}{M} \right)^2 + 2a^2 \left(M + \frac{1}{M} \right) \cos.\gamma - b^2 = 0.$$

Posant donc $M + \frac{1}{M} = z$, nous aurons

$$a^2 z^2 + 2a^2 z \cos \gamma - b^2 = 0 ;$$

d'où

$$z = \frac{-a \cos \gamma \pm \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2 \gamma}}{a} .$$

En formant le losange ODPE, abaissant la perpendiculaire EC sur OD, prolongeant CE vers E, jusqu'en F, de manière que CF = b; faisant OC = c, OF = d, on aura

$$c = a \cos \gamma , \quad d = \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2 \gamma} ,$$

et conséquemment

$$z = \frac{-c \pm d}{a} = \pm \frac{d \mp c}{a} ;$$

décrivant donc du point O comme centre, et avec OF pour rayon, le demi-cercle GFG', nous aurons

$$CG = d - c , \quad CG' = d + c ;$$

de sorte que les deux valeurs de z seront

$$z = + \frac{CG}{a} , \quad z = - \frac{CG'}{a} ;$$

mais l'équation $M + \frac{1}{M} = z$, qui revient à

$$M^2 - zM + 1 = 0 ,$$

donne

$$M = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2} ;$$

substituant donc successivement ces deux valeurs, nous aurons

$$M = \frac{CG \pm \sqrt{CG^2 - 4a^2}}{2a}, \quad M = \frac{-CG' \pm \sqrt{CG'^2 - 4a^2}}{2a};$$

et de là, à cause de $OB = (1 - M)a$

$$OB = -\left(\frac{1}{2}CG - a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}CG^2 - a^2},$$

$$OB = +\left(\frac{1}{2}CG' + a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}CG'^2 - a^2},$$

longueurs faciles à construire, et dont la détermination résout le problème.

PROBLÈME II. Quel est le lieu des centres de gravité des aires de tous les triangles qui ont une aire constante et un angle constant donnés ?

Solution. Soit pris l'angle constant donné, que nous désignerons par γ pour angle des coordonnées positives; soient X, Y les deux côtés qui le comprennent, et soit T l'aire constante dont il s'agit; nous aurons, par un théorème connu,

$$XY \sin. \gamma = 2T.$$

Mais, si nous désignons par x, y les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, par une propriété connue de ce centre,

$$X = 3x, \quad Y = 3y$$

substituant donc, l'équation du lieu cherché sera

$$9xy \sin. \gamma = 2T;$$

équation d'une hyperbole facile à construire, et dont les axes des coordonnées sont les asymptotes.

PROBLÈME III. Quel est le lieu des centres de gravité des

88 PROBL.^e DU CONC.^{rs} DES COLLÈGES ROYAUX DE PARIS.
volumes de tous les tétraèdres qui ont un volume constant et un angle trièdre constant donnés ?

Solution. Soit pris l'angle trièdre constant donné pour angle des coordonnées positives; désignons par α , β , γ ses trois angles plans, et soient X , Y , Z les longueurs des arêtes respectivement opposées; soit enfin T le volume constant dont il s'agit; nous aurons, par un théorème connu,

$$XYZ\sqrt{1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma}=6T,$$

Mais, si nous désignons par x , y , z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, par une propriété connue de ce centre,

$$X=4x, \quad Y=4y, \quad Z=4z;$$

Substituant donc, l'équation du lieu cherché sera

$$64xyz\sqrt{1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma}=6T;$$

équation d'une surface du troisième ordre, ayant les plans coordonnés pour plans asymptotiques (*).

(*) Nous nous abusons peut-être; mais le problème proposé aux élèves de mathématiques élémentaires nous paraît, à lui seul, plus difficile et plus susceptible de développemens et de détails, que ne le sont ensemble les deux qui ont été proposés aux élèves de mathématiques spéciales. Il se peut, au surplus, que les géomètres qui en ont fait le choix, aient aperçu quelque manière simple de le résoudre, qui aura également échappé à M. Francœur et à nous.