ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Catoptrique. Recherche du foyer des miroirs sphériques concaves et convexes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 97-100
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__97_0>

CATOPTRIQUE.

Recherche du foyer des miroirs sphériques concaves et convexes;

Par M. GERGONNE.

On trouve, dans la plupart des traités d'optique, des formules qui donnent la position du foyer des miroirs sphériques concaves et convexes, pour toutes les situations que peut avoir le point lumineux sur l'axe du miroir; et ces formules ne laissent sans doute rien à désirer, soit sous le rapport de l'exactitude, soit sous celui de la simplicité des considérations qui y conduisent.

Mais j'ai remarqué depuis long temps que l'on pouvait aussi parvenir à ces mêmes formules d'une manière très-élémentaire, par la considération des propriétés des sections coniques; et, comme je n'ai rencontré aucun traité d'optique où la question ait été envisagée sous ce point de vue, j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans quelque intérêt ce nouveau genre d'application de la théorie de ces sortes de courbes; persuadé, comme je le suis, que l'un des plus grands charmes attachés à la culture des sciences exactes naît de la parfaite identité entre des résultats obtenus par des méthodes qui, au premier abord, semblent totalement différentes.

LEMME. Trouver le rayon de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole à l'un de ses sommets?

Solution. En prenant l'un des sommets pour origine des coordonnées rectangulaires, l'axe et la tangente à son extrémité pour axes des x et des y, respectivement ; représentant de plus l'axe par $2a$ et le paramètre par p ; l'équation commune à l'ellipse et à l'hyperbole sera, comme l'on sait,

$$y^2=px\mp\frac{p}{2a}x^2 \ ;$$

le signe supérieur répondant à l'ellipse, et l'inférieur à l'hyperbole.

On trouvera de plus, pour l'équation de la normale à la courbe par le point x', y',

$$y-y'=-\frac{2ay'}{p(a\mp x')}(x-x') \ ;$$

en y faisant $y=0$, on trouvera que cette normale rencontre l'axe des x en un point pour lequel on a

$$x=\frac{p(a\mp x')+2ax'}{2a}=\tfrac{1}{2}p\left(1\mp\frac{x'}{a}\right)+x' \ .$$

Cela posé, si l'on mène à la courbe une normale par un point très-voisin du sommet, l'arc de la courbe compris entre ce point et le sommet pourra évidemment être considéré sensiblement comme un arc de cercle ayant son centre à l'intersection de cette normale avec celle du sommet, c'est-à dire, avec l'axe des x, et cette approximation deviendra un résultat tout-à-fait rigoureux, lorsque les deux normales en viendront enfin à coïncider ; donc, la courbe a, à son sommet, une courbure égale à celle du cercle dont le rayon serait ce que devient la valeur de x trouvée en dernier lieu, en y faisant $x'=0$, c'est-à-dire,

$$x=\tfrac{1}{2}p \ ;$$

ainsi, dans les deux courbes, *le rayon de courbure au sommet est égal au demi-paramètre.*

PROBLÈME I. Trouver le foyer d'un miroir sphérique concave, pour une position donnée du point lumineux sur l'axe du miroir ?

Solution. Soit r le rayon du miroir et soit d la distance de sa surface au point lumineux. Considérons ce miroir, que nous supposons une très-petite portion de la sphère dont il fait partie, comme un miroir elliptique ; le paramètre de l'ellipse génératrice sera $2r$, et la distance de son sommet à l'un de ses foyers que, pour fixer les idées, nous supposons être le plus éloigné, sera d ; en désignant donc par x la distance du même sommet à l'autre foyer, qui est évidemment le foyer cherché, on aura, par les propriétés connues de la courbe

$$\frac{2ax-x^2}{a}=\tfrac{1}{2}p=r\ ;$$

d'où

$$2ax-x^2=ar\ ;$$

et ensuite

$$d=2a-x\ ;$$

éliminant donc a, entre ces deux équations, il viendra

$$x=\frac{rd}{2d-r}=\frac{\frac{1}{2}rd}{d-\frac{1}{2}r}\ ;$$

formule qui résout le problème.

PROBLÈME II. Trouver le foyer d'un miroir sphérique convexe ; pour une position donnée du point lumineux sur l'axe du miroir ?

Solution. Soit r le rayon du miroir, et soit d la distance de sa surface au point lumineux. Considérons ce miroir, que nous supposons une très-petite portion de la sphère dont il fait partie, comme un miroir hyperbolique ; le paramètre de l'hyperbole génératrice sera $2r$, et la distance de son sommet au foyer de l'hyperbole opposée sera d ; en désignant donc par x la distance du même sommet à l'autre foyer, qui est le foyer cherché, on aura, par les propriétés connues de la courbe,

$$\frac{2ax+x^2}{a}\cdot\frac{1}{2}p=r\ ;$$

d'où

$$2ax+x^2=ar\ ;$$

et ensuite

$$d=2a+x\ ;$$

éliminant a, entre ces deux équations, il viendra

$$x=\frac{rd}{2d+r}=\frac{\frac{1}{2}rd}{d+\frac{1}{2}r}\ ;$$

formule qui résout le problème.

Corollaire. On peut, d'après cela, comprendre les deux formules dans la formule unique

$$\pm x=\frac{\frac{1}{2}rd}{d\mp\frac{1}{2}r}\ ;$$

le signe supérieur étant relatif au miroir concave, et le signe inférieur au miroir convexe.

Nous renvoyons aux traités d'optique pour les nombreuses conséquences qu'on peut déduire de ces formules.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.