TREUIL

Géométrie élémentaire. Solution des problèmes proposés au concours général des élèves de mathématiques spéciales de Paris, le 10 de juillet 1820

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 147-152
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__147_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Solution des problèmes proposés au Concours général des élèves de mathématiques spéciales de Paris, le 10 de juillet 1820;

Par M. Treuil, professeur de mathématiques au collége royal de Versailles, et à l'école royale militaire de Saint-Cyr.

PROBLÈME I. *Un cercle étant donné, dans un plan horizontal,* on demande,

1.° *De faire voir que, si l'on coupe un cône droit, dont ce cercle soit la base, par une suite de plans parallèles et verticaux, les sections résultantes seront des hyperboles qui auront leurs asymptotes parallèles?*

2.° *De trouver sur la verticale élevée par le centre du cercle le point où il faut placer le sommet pour que les hyperboles dont il s'agit soient équilatères?*

Solution. Soient S (fig. 7) le sommet du cône; O un quelconque des points de son axe, par lequel soit conduit un plan horizontal; GH un diamètre de cette section, perpendiculaire au plan coupant, MN la trace du plan coupant sur cette même section circulaire; P l'intersection de MN et GH; AB la trace du plan coupant sur le plan du triangle GSH; A et B les intersections de cette trace avec SG et SH; C le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur AB; α l'angle générateur du cône; et enfin $2a$ la longueur AB.

Soit pris le plan coupant pour celui des coordonnées rectangulaires; AB étant l'axe des x et le point A l'origine; et les x positives étant comptées de A vers P. Soient, en conséquence $AP=x$ et $PM=y$.

Les triangles rectangles APG, BPH donnent

$$PG=AP\,\text{Tang.}\,\alpha=x\,\text{Tang.}\,\alpha\ ,$$

$$PH=BP\,\text{Tang.}\,\alpha=(2a+x)\,\text{Tang.}\,\alpha\ ;$$

mais on a

$$\overline{MP}^2 \quad \text{ou} \quad y^2=PG.PH\ ;$$

donc

$$y^2=(2ax+x^2)\,\text{Tang.}^2\alpha\ ;$$

telle est donc l'équation de la courbe, que l'on reconnaît être une hyperbole.

Si l'on veut transporter l'origine en C, il faudra changer x en $x-a$, et l'équation deviendra

$$y^2=(x^2-a^2)\,\text{Tang.}^2\alpha\ ;$$

équation d'une hyperbole rapportée à ses diamètres principaux, et dans laquelle le demi-second axe a pour longueur $a\,\text{Tang.}\,\alpha$.

Donc, d'après les théories connues, l'équation commune aux deux asymptotes de la courbe est

$$y=\pm x\,\text{Tang.}\,\alpha\ ;$$

ces asymptotes font donc, pour toutes les sections parallèles à celle

celle que nous avons considérées, un angle constant avec l'axe transverse de la courbe; puis donc que cet axe transverse est constamment parallèle à lui-même, et qu'il en est de même du plan qui contient cet axe et l'asymptote, il en résulte que les asymptotes des diverses sections doivent être parallèles chacune à chacune (*).

Pour répondre à la seconde partie du problème, on supposera égaux les deux demi-diamètres principaux; ce qui donnera $a\text{Tang.}\alpha=a$, ou $\text{Tang.}\alpha=1$, ou $\alpha=45°$, comme on pouvait bien s'y attendre. Ainsi, pour construire le cône droit dans lequel les sections parallèles à l'axe sont des hyperboles équilatères, il ne s'agit que de prendre sa hauteur égale au rayon de sa base (**).

(*) Il est connu que toutes les sections parallèles faites, non seulement dans un cône droit, mais même dans un cône oblique ou dans une surface conique quelconque, sont des courbes semblables et semblablement situées tant entre elles que par rapport au sommet de la surface, qui en est un point homologue commun.

On voit par là que, si le plan parallèle à ceux des sections, conduit par le sommet, passe dans l'intérieur de la surface conique, auquel cas il la coupe suivant des droites, les sections seront des courbes à asymptotes rectilignes dont les asymptotes seront respectivement parallèles à ces droites, et par suite parallèles chacune à chacune d'une section à l'autre; ainsi la proposition est vraie pour des sections parallèles faites sous une inclinaison quelconque, dans une surface conique quelconque.

Dans le cas particulier du problème proposé, les asymptotes des diverses sections sont toutes parallèles aux droites déterminées dans le cône par un plan conduit par son axe, parallèlement à ceux des sections, et les projections orthogonales de ces droites sur les plans des diverses sections sont les asymptotes même de ces sections. Ainsi, non seulement ces asymptotes sont parallèles, mais elles sont toutes situées sur les deux faces d'un même angle dièdre circonscrit au cône, et dont l'arête est horizontale.

J. D. G.

(**) Plus généralement, si, sur une base circulaire donnée, on voulait construire un cône oblique tel que les asymptotes des sections hyperboliques faites dans

PROBLÈME II. On donne le centre et le rayon d'une sphère ; et on propose de démontrer qu'un plan quelconque perpendiculaire au rayon coupe, suivant un cercle, tout cône qui a son sommet à l'extrémité de ce rayon et pour base un quelconque des cercles de la sphère ?

Solution. Pour résoudre cette question nous allons d'abord démontrer que *si, ayant coupé un cône oblique à base circulaire par un plan perpendiculaire à celui de sa base, passant par le centre de cette base et par le sommet du cône, on fait dans ce cône une section perpendiculaire à ce plan, de telle sorte que cette section fasse avec les deux arêtes déterminées par le plan passant par l'axe, les mêmes angles que fait le plan de la base avec ces mêmes arêtes, mais en sens inverse; la section sera circulaire.*

Soit S (fig. 8) le sommet d'un cône oblique à base circulaire, et soit A′SB′ l'angle résultant de sa section par le plan conduit perpendiculairement à celui de sa base, et passant à la fois par le centre de cette base et par le sommet du cône. Soit faite dans ce cône, perpendiculairement à ce plan, une section AMBN, coupant, suivant AB, le plan de l'angle A′SB′, de telle sorte que l'angle SAB soit égal à celui que fait SB avec la base du cône, et que par conséquent l'angle SBA soit égal à l'angle que fait SA avec cette même base. Il s'agit de démontrer que cette section est circulaire.

---

ce cône, par une suite de plans parallèles à un plan fixe donné, fissent entre elles un angle égal à un angle donné ; il ne s'agirait que de mener, dans la base donnée, une corde quelconque, parallèle au plan donné ; de conduire, par cette corde, un plan parallèle à ce même plan ; de construire, dans ce dernier plan, et sur cette même corde un arc capable de l'angle donné et d'établir le sommet du cône en l'un quelconque des points de cet arc. On voit qu'il reste, dans cette construction, beaucoup d'arbitraire qu'on peut mettre à profit pour satisfaire à des conditions données.

J. D. G.

Pour cela, par l'un qnelconque M de ses points; concevons une section $A'MB'N$ parallèle à la base du cône, dont les intersections respectives avec le plan de l'angle $A'SB'$ et le plan AMBN soient $A'B'$ et MN, se coupant en P sur AB ; cette section sera circulaire et perpendiculaire, comme AMBN au plan $A'SB'$; d'où il résulte que MN sera perpendiculaire à ce plan, et conséquemment à AB et $A'B'$. De plus, les angles PBA' et $PA'B$ seront respectivement égaux aux angles $PB'A$ et PAB'; les triangles $A'PB$ et APB' seront donc semblables et donneront, par conséquent,

$$PA : PB' :: PA' : PB \, ,$$

d'où

$$PA'.PB' = PA.PB \; ;$$

mais, par la propriété du cercle,

$$\overline{PM}^2 = PA'.PB' \; ;$$

donc aussi

$$\overline{PM}^2 = PA.PB \; ;$$

donc enfin la section AMBN est un cercle, dont AB est un diamètre (*).

(*) Cette propriété du cône oblique, à base circulaire, peut encore être démontrée comme il suit. Concevons toujours, par la droite qui joint le sommet au centre de la base, un plan perpendiculaire au plan de cette base, lequel déterminera deux droites sur la surface du cône. Concevons que, par la droite qui divise l'angle de ces deux-là en deux parties égales, on conduise un second plan, perpendiculaire à celui de cet angle ; ce dernier plan, comme le premier, divisera la surface conique, considérée comme indéfinie, en deux parties exactement symétriques et même superposables ; d'où il suit que si, par une droite menée, dans ce second plan, perpendiculairement au premïer, on fait

Cela posé, soient C, le centre d'une sphère (fig. 9) et CS l'un quelconque de ses rayons. Faisons de S le sommet d'un cône ayant pour base l'un quelconque des cercles de la sphère; par CS et par le pôle de ce cercle soit conduit un plan qui déterminera sur la sphère un grand cercle GSH, coupant le cône suivant les droites SA′, SB′. Soit GH le diamètre de ce cercle perpendiculaire à CS, coupant SA′ et SB′ respectivement en B et A. A′B′ sera un diamètre de la base du cône, et le plan de notre grand cercle sera un plan perpendiculaire à celui de cette base passant par son centre et par le sommet du cône.

L'angle SA′B′ ayant pour mesure la moitié de l'arc SGB′, c'est-à-dire, la moitié de SG+GB′, et l'angle SAB ayant pour mesure la moitié de SH+GB′; à cause de SH=SG, ces deux angles seront égaux, d'où il suit qu'il en sera de même de SB′A′ et SBA.

Donc, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, si par GH on conduit un plan perpendiculaire à CS, ce plan coupera le cône suivant un cercle dont AB sera un diamètre; toutes les sections du cône par des plans parallèles à celui-là, c'est-à-dire, perpendiculaires à CS seront donc également circulaires.

---

au cône deux sections formant, en sens inverse, des angles égaux avec ce même plan, ces sections seront des courbes égales; mais, si l'une d'elles est parallèle à la base du cône, elle sera circulaire; donc alors l'autre le sera aussi. On voit par là (fig. 8) que la droite qui divise l'angle A′SB′ en deux parties égales doit faire des angles égaux, en sens inverse avec AB et A′B′.

J. D. G.