
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

**Questions résolues. Démonstration du théorème d'analyse transcendante,
énoncé à la page 388 du X.e volume des Annales**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 195-198

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__195_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1820-1821, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstration du théorème d'analyse transcendante ,
énoncé à la page 388 du X.^e volume des Annales ;*

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS ,
Et par un ancien ELÈVE de l'école polytechnique.

M. SARRUS attaque la question d'une manière tout-à-fait synthétique.
Il remarque d'abord que l'on a , par les théories connues ,

$$\text{Sin. } z = 2 \text{Sin. } \frac{z}{2} \text{Cos. } \frac{z}{2} ,$$

$$\text{Sin. } \frac{z}{2} = 2 \text{Sin. } \frac{z}{4} \text{Cos. } \frac{z}{4} ,$$

$$\text{Sin.} \frac{z}{4} = 2 \text{Sin.} \frac{z}{8} \text{Cos.} \frac{z}{8} ,$$

.....

$$\text{Sin.} \frac{z}{2^{n-2}} = 2 \text{Sin.} \frac{z}{2^{n-1}} \text{Cos.} \frac{z}{2^{n-1}} ;$$

$$\text{Sin.} \frac{z}{2^{n-1}} = 2 \text{Sin.} \frac{z}{2^n} \text{Cos.} \frac{z}{2^n} ;$$

d'où ; en multipliant et réduisant ,

$$\text{Sin.} z = 2^n \text{Sin.} \frac{z}{2^n} \text{Cos.} \frac{z}{2} \text{Cos.} \frac{z}{4} \text{Cos.} \frac{z}{8} \dots \text{Cos.} \frac{z}{2^n} .$$

Mais comme , à mesure que n augmente , $\text{Sin.} \frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à devenir $\frac{z}{2^n}$; il s'ensuit que , dans le même cas , $2^n \text{Sin.} \frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à se confondre avec l'arc z ; de sorte qu'en faisant n infini , on a rigoureusement

$$\text{Sin.} z = z \text{Cos.} \frac{z}{2} \text{Cos.} \frac{z}{4} \text{Cos.} \frac{z}{8} \text{Cos.} \frac{z}{16} \text{Cos.} \frac{z}{32} \dots ;$$

formule dont le second membre a une infinité de facteurs tendant sans cesse vers l'unité , quel que soit l'arc z , ce qui en garantit la convergence.

En prenant les différentielles logarithmiques des deux membres , on tire de là , en transposant ,

$$\frac{1}{z} = \text{Cot.} z + \frac{1}{2} \text{Tang.} \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \text{Tang.} \frac{z}{4} + \frac{1}{8} \text{Tang.} \frac{z}{8} + \dots \quad (\text{I})$$

Si

Si l'on pose ensuite $z = \frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, en observant que $\text{Cot. } \frac{\pi}{2} = 0$ et divisant par 2, on aura

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \text{Tang. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \text{Tang. } \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} \text{Tang. } \frac{\pi}{16} + \dots, \quad (\text{II})$$

qui est précisément la formule à démontrer.

M. Sarrus observe que ces deux séries, l'une et l'autre très-régulières, convergent rapidement toutes deux vers des progressions décroissantes par quotiens ayant 4 pour raison; de sorte qu'en prenant pour n un très-grand nombre, la dernière, par exemple, pourra être sensiblement remplacée par cette formule finie

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \text{Tang. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \text{Tang. } \frac{\pi}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \text{Tang. } \frac{\pi}{2^n} + \frac{2}{3 \cdot 2^n} \text{Tang. } \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

L'anonyme, au contraire, parvient à son but par un procédé tout-à-fait analitique, et conséquemment inverse de celui de M. Sarrus. Il cherche généralement quelle fonction finie peut être équivalente à la série infinie

$$\frac{1}{4} \text{Tang. } \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \text{Tang. } \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \text{Tang. } \frac{x}{16} + \dots;$$

où x désigne un arc quelconque. Posant donc cette série égale à une certaine variable y , multipliant par dx et intégrant, il obtient

$$\int y dx = C - \left\{ \text{Log. Cos. } \frac{x}{4} + \text{Log. Cos. } \frac{x}{8} + \text{Log. Cos. } \frac{x}{16} + \dots \right\};$$

ou bien

$$\int y dx = C - \text{Log} \left(\text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Cos. } \frac{x}{8} \text{Cos. } \frac{x}{16} \text{Cos. } \frac{x}{32} \dots \right) ;$$

observant ensuite que

$$\text{Cos. } \frac{x}{4} \text{Cos. } \frac{x}{8} \text{Cos. } \frac{x}{16} \text{Cos. } \frac{x}{32} \dots = \frac{\text{Sin. } x}{x \text{Cos. } \frac{x}{2}} ,$$

il en conclut que

$$\int y dx = C - \text{Log} \frac{\text{Sin. } x}{x \text{Cos. } \frac{x}{2}} = C - \text{Log Sin. } x + \text{Log Cos. } \frac{x}{2} - \text{Log } x ;$$

d'où, en différentiant et divisant par dx ,

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Tang. } \frac{x}{2} - \text{Cot. } x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Cot. } \frac{x}{2} ;$$

ce qui donne, en remettant pour y sa valeur et transposant,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Cot. } \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \text{Tang. } \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \text{Tang. } \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \text{Tang. } \frac{x}{16} + \dots ;$$

formule qui est générale quel que soit l'arc x .

Si ensuite on suppose $x = \frac{\pi}{2}$, on tombe précisément sur la formule proposée à démontrer.