ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution du premier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 160 du X.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 225-228
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__225_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 160 du X.e volume de ce recueil ;

Par M. M....s.

PROBLÈME. Déterminer l'aire d'un quadrilatère rectiligne circonscrit au cercle, en fonction de ses quatre côtés ?

I.

Dans tout quadrilatère rectiligne circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Soit (fig. 11) ABCDA un quadrilatère rectiligne, dont les côtés AB, BC, CD, DA, touchent respectivement un cercle aux points a, b, c, d ; il s'agit de prouver que $AB+CD=BC+DA$,

On sait, en effet, qu'on a

$$\mathrm{A}a=\mathrm{A}d\ ,$$

$$\mathrm{B}a=\mathrm{B}b\ ,$$

$$\mathrm{C}c=\mathrm{C}b\ ,$$

$$\mathrm{D}c=\mathrm{D}d\ ,$$

d'où on conclut, en ajoutant et réduisant, $AB+CD=BC+DA$; comme nous l'avions annoncé.

II.

Si, dans un quadrilatère rectiligne, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres, un cercle pourra toujours lui être inscrit.

Soit (fig. 12) ABCDA un quadrilatère rectiligne dans lequel on a $AB+CD=BC+DA$; il s'agit de prouver qu'un cercle peut toujours lui être inscrit.

Comme on peut toujours décrire un cercle qui touche trois des côtés du quadrilatère, tout se réduit à prouver que ce cercle touchera aussi son quatrième côté.

Supposons donc qu'on ait décrit un cercle qui touche respectivement les côtés AB, BC, CD en a, b, c; il s'agit de prouver que ce cercle touchera aussi le quatrième côté DA.

Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, par le point D on peut mener au cercle une tangente différente de DC et DA, touchant ce cercle en quelque point d, et coupant AB ou son prolongement en quelque point E; alors le quadrilatère EBCDE se trouvant inscrit au cercle, on devra avoir (I)

$$EB+CD=BC+DE\ ;$$

mais on a par hypothèse

$$AB+CD=BC+AD\ ;$$

Retranchant donc la première de ces deux équations de la seconde, il viendra, en réduisant,

$$AE=AD-DE \quad \text{ou} \quad AE+ED=AD\ ;$$

résultat absurde qui prouve que la tangente DE ne saurait différer de DA, que par conséquent le cercle tangent aux trois côtés AB, BC, CD du quadrilatère dont il s'agit doit aussi toucher le quatrième DA, et qu'ainsi, de cela seulement que la somme de deux côtés opposés d'un quadrilatère rectiligne est égale à la somme des deux autres, le quadrilatère est circonscriptible au cercle.

III.

De ce qui vient d'être dit, il résulte évidemment que, lorsqu'on propose de construire un quadrilatère dont les côtés soient donnés et qui soit circonscriptible au cercle, on propose un problème impossible ou indéterminé; impossible, si la somme de deux côtés opposés n'est pas égale à la somme des deux autres : indéterminé, si, au contraire, cette relation a lieu. Donc aussi demander l'aire d'un tel quadrilatère c'est proposer un problème impossible, s'il n'est pas indéterminé.

IV.

Par des raisonnemens tout-à-fait semblables, on parviendra facilement à s'assurer que proposer de déterminer l'aire d'un quadrilatère sphérique circonscriptible à un petit cercle de la sphère, en fonction de ses quatre côtés, c'est également proposer un problème indéterminé, toutes les fois qu'il n'est pas impossible.

Berlin, le 24 octobre 1820.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUEL est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=4$?

II. Quel est le lieu des centres de toutes les hyperboles équilatères qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=3$?

III. Quel est le lieu des foyers de toutes les paraboles qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=3$?