ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC
AUGUSTE OLLIVE
VECTEN

Solution du problème d'arithmétique proposé à la page 96 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 337-343
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__337_0>

Solution du problème d'arithmétique proposé à la page 96 de ce volume ;

Par MM. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier,
Auguste Ollive, licencié ès lettres,
Et Vecten, licencié ès lettres.

PROBLÈME. *On a écrit de suite, et sans aucune séparation, les nombres consécutifs de la suite naturelle, en cette manière :*

1234567891011121314151617181920212223……

En considérant simplement cette suite comme une suite de chiffres posés à côté les uns des autres ; on propose d'assigner le chiffre qui doit y occuper un rang quelconque n, *sans être obligé d'écrire ceux qui le précèdent ?*

Solution. Les trois géomètres qui se sont occupés de cette question l'ont également décomposée dans les trois suivantes : 1.° assigner combien de chiffres a le nombre naturel dont le chiffre cherché fait partie ; 2.° déterminer, en particulier, quel est ce nombre parmi ceux qui ont autant de chiffres que lui ; 3.°

trouver le rang qu'occupe dans ce même nombre le chiffre dont il s'agit.

Pour rendre le procédé général plus intelligible, voyons d'abord, sur un exemple particulier, comment on peut résoudre successivement les trois questions auxquelles le problème se trouve ramené. Soit $n=6192$; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de déterminer le 6192.^{me} chiffre de la série proposée.

1.° On rencontre d'abord, dans cette suite, 9 nombres d'*un* seul chiffre, ce qui fait 9 chiffres; et puisqu'on a $6192>9$, il s'ensuit que le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus d'*un* chiffre.

Viennent ensuite 90 nombres de *deux* chiffres, formant en tout 180 chiffres; or, $6192-9=6183>180$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus de *deux* chiffres.

A la suite des nombres de deux chiffres viennent 900 nombres de *trois* chiffres, formant ensemble 2700 chiffres; or $6183-180=6003>2700$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus de *trois* chiffres.

A la suite des nombres de trois chiffres viennent 9000 nombres de *quatre* chiffres, formant ensemble 36000 chiffres ; or $6003-2700=3303<36000$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie n'a pas plus de *quatre* chiffres; et, puisqu'il en a plus de trois, ce nombre a précisément quatre chiffres.

2.° Le dernier reste 3303 prouve de plus que le chiffre cherché occupe le 3303.^{me} rang, à partir du premier chiffre de gauche de 1000, premier nombre de quatre chiffres ; d'où il suit que la question est ramenée à chercher quel est le chiffre qui occupe le 3303.^{me} rang dans la suite

$$100010011002100031004100 5..........9999 \cdot$$

des nombres naturels, à portir de 1000.

Si 3303 était exactement divisible par *quatre*, il est évident que le quotient exprimerait le rang qu'occupe, dans cette dernière suite, le nombre dont le chiffre cherché fait partie, et que même ce chiffre y occuperait le dernier rang à droite; mais si la division donne un reste, ce sera le quotient augmenté d'une unité qui exprimera le rang de ce nombre, dans lequel le chiffre cherché n'occupera plus alors la dernière place.

Or, en divisant 3303 par 4, on obtient 825 pour quotient et 3 pour reste; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie est le 826.me de notre dernière suite; et, puisque cette suite commence à 1000, ce nombre est 1825.

3.° Enfin, le reste 3 indiquant que le chiffre cherché est le troisième chiffre de ce nombre, en allant de gauche à droite, il s'ensuit que ce chiffre est 2.

En récapitulant donc, on voit que le procédé général peut se réduire à ce qui suit : du nombre proposé n, retranchez successivement les nombres $1.9=9$, $2.90=180$, $3.900=2700$, $4.9000=36000$, ... aussi long-temps que les soustrations pourront être faites; divisez le dernier reste par autant d'unités, plus deux que le dernier nombre retranché aura de zéros à sa droite; ne prenez que le quotient entier le plus approché, et notez le reste; augmentez ce quotient d'une unité de l'ordre marqué par le diviseur; comptez, dans ce quotient, ainsi augmenté, autant de chiffres, en allant de gauche à droite, que le reste aura d'unités; alors le dernier chiffre compté de cette manière sera le chiffre demandé.

On peut, pour plus de commodité, disposer l'opération comme on le voit ici :

Nombre n proposé.	6192	
-1.9	9	
1.^{er} reste.	6183	
-2.90	180	
2.^{e} reste	6003	
-3.900	2700	
3.^{e} reste.	3303	4 diviseur
reste.	3	1825 quotient augmenté
		. . .

Le chiffre cherché est 2.

Voilà sous quelle forme M. Ollive a présenté le procédé. MM. Lenthéric et Vecten ont cherché à l'abréger, en remplaçant cette suite de soustractions par une soustraction unique de la somme de tous les nombres à retrancher; ils ont entrevu sans doute que ces nombres formant la suite très-régulière

$$1.9+2.90+3.900+4.9000+\dots\dots\dots$$

la somme de cette suite, à quelque nombre de termes qu'on le bornât, devait affecter une forme également régulière; et l'examen dans lequel ils se sont engagés à ce sujet a pleinement justifié ce soupçon.

On a, en effet,

$$1.9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots 9\,;$$

$$1.9+2.90 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots 189\,,$$

$$1.9+2.90+3.900 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots 2889\,,$$

1.9

$$1.9+2.90+3.900+4.9000 \ldots\ldots = 38889\,,$$

$$1.9+2.90+3.900+4.9000+5.90000=488889\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

de sorte qu'on est conduit à soupçonner que le nombre unique à retrancher pourrait bien être, en général, un nombre terminé par 9, précédé d'une suite de 8, précédés eux-mêmes d'un nombre d'autant d'unités qu'il y a de 8 à sa droite.

Pour changer ce soupçon en certitude, désignons généralement par S_m la somme qu'on obtient pour la série, lorsqu'on y admet m termes, et supposons que la loi se soit soutenue pour toutes les sommes de termes, jusqu'à la somme des $m-1$ premiers inclusivement; nous aurons ainsi

$$S_{m-1}=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-4}+10^{m-3})+(m-2)10^{m-1}\,;$$

or,

$$S_m=S_{m-1}+m.9.10^{m-1}\,;$$

donc

$$S_m=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-4}+10^{m-3})+(m-2)10^{m-1}+m.9.10^{m-1}$$

or,

$$(m-2)10^{m-1}+m.9.10^{m-1}=80.10^{m-2}+(m-1)10^m\,;$$

donc enfin

$$S_m=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-3}+10^{m-2})+(m-1)10^m\,;$$

valeur qui ne diffère de celle de S_{m-1} qu'en ce que $m-1$ y est changé en m. Il demeure donc établi que, si la loi se maintient jusqu'à la série de $m-1$ termes, elle aura lieu également pour une série de m termes; puis donc qu'elle a lieu pour les séries de 1, 2, 3, 4, 5 termes, il s'ensuit qu'elle est générale.

Cette remarque conduit MM. Lenthéric et Vecten à réduire le procédé à ce qui suit : écrivez un 9 sous les unités du nombre n et une suite de 8 à la gauche de ce 9, en tel nombre qu'en écrivant un pareil nombre d'unités à la gauche du dernier, vous n'excédiez pas le nombre n ; faites alors la soustraction, et divisez le reste par autant d'unités, plus deux que vous aurez écrit de 8 ; augmentez le quotient d'une unité de l'ordre marqué par le diviseur ; comptez enfin, dans ce quotient, ainsi augmenté, autant de chiffres, de gauche à droite, que vous aurez d'unités au reste ; le dernier chiffre sur lequel vous vous serez arrêté sera le chiffre cherché.

Exemple. Soit $n=528276$; on opérera comme on le voit ici :

Nombre proposé	828276	
Nombre à retrancher	488889	
Reste	339387	6 divis.
reste	3	156564 quot.

ce qui montre que le chiffre cherché est un 6.

Remarque I. Si le reste de la division était zéro, le chiffre cherché serait le dernier chiffre de la droite du quotient diminué d'une unité, à moins cependant que celui-ci ne fût un zéro, auquel cas le chiffre cherché serait un 9.

Exemple I. Soit $n=3157$.

Nombre proposé	3157	
Nombre à retrancher	2889	
Reste.	268	4 diviseur
reste	0	1067 quotient aug.

ce qui montre que le chiffre cherché est un 6.

Exemple II. Soit $n=59439$.

Nombre proposé 59439
Nombre à retrancher. 38889

Reste.	20550	5 diviseur
reste	0	14110 quotient

ce qui montre que le chiffre cherché est un 9.

Remarque II. Si, pour former le nombre à retrancher, on est obligé d'écrire le chiffre 8 neuf fois consécutivement, on ne mettra rien à gauche, le dernier 8 tenant lieu du nombre des 8; mais ce dernier 8 ne devra pas entrer en compte dans la recherche du nombre des unités du diviseur.

De même si l'on devait écrire dix-neuf 8, on n'écrirait qu'un 1 à leur gauche, le 18 exprimant alors le nombre des 8, lequel ne devrait compter que pour dix-huit dans la recherche du diviseur. On se comportera d'une manière analogue, dans tous les cas semblables:

De même, si l'on devait écrire nonante 8, on ne mettrait rien à leur gauche, et ils ne devraient compter que pour huitante-huit, les deux derniers exprimant seulement le nombre des 8 écris à droite. Si l'on devait en écrire cent nonante, on n'écrirait qu'un 1 à la gauche, et ainsi de suite.

Exemple. Soit $n=8889754327$.

Nombre proposé 8889754327
Nombre à retrancher. . 8888888889

Reste.	865438	10
reste	8	1000086543
		. . . .

d'où l'on voit que le chiffre cherché est un 5.