PLANA

Analise transcendante. Sur le développement des puissances des cosinus en cosinus d'arcs multiples

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 84-89
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__84_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Sur le développement des puissances des cosinus en cosinus d'arcs multiples ;

Par M. Plana, professeur d'astronomie à l'université de Turin.

Dans le troisième volume de son *Calcul intégral* (2.e édit., pag. 605 et suiv.), M. Lacroix a exposé les difficultés que présente le développement d'une puissance quelconque du cosinus d'un arc en série procédant suivant les cosinus des multiples de cet arc ; développement qu'on avait cru exact pour toutes les valeurs de l'exposant, jusqu'à l'époque où M. Poisson, dans le 2.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* ; signala l'erreur où l'on était demeuré jusqu'alors sur ce sujet.

Il m'a paru que ce point de doctrine pourrait être facilement éclairci de la manière suivante.

En posant

$$u=\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x$$

$$v=\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x\ ,$$

on a

$$u+v=2\mathrm{Cos}.x\ ,$$

d'où

$(u+v)^m$

$$(u+v)^m=2^m.\text{Cos.}^m x\;;$$

donc, en développant le binome, on aura

$$2^m.\text{Cos.}^m x=u^m+\frac{m}{1}u^{m-2}.uv+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}u^{m-4}.u^2v^2+\ldots;$$

en remarquant que $uv=1$, et que

$$u^n=\text{Cos}.nx+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.nx\;;$$

et faisant, pour abréger,

$$A=\text{Cos}.mx+\frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos}.(m-4)x+\ldots\;;$$

$$B=\text{Sin}.mx+\frac{m}{1}\text{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin}.(m-4)x+\ldots\;;$$

on aura

$$2^m.\text{Cos.}^m x=A+B\sqrt{-1}\,. \qquad (1)$$

Si, au lieu de développer $(u+v)^m$, on développe son équivalent $(v+u)^m$, au lieu de l'équation (1), on aura la suivante

$$2^m.\text{Cos.}^m x=A-B\sqrt{-1}\,. \qquad (2)$$

Les équations (1, 2) ne sauraient s'accorder qu'autant qu'on aura généralement $B=0$. Or, il est aisé de prouver qu'effectivement cette fonction est toujours nulle, à l'exception d'un cas que la démonstration même met en évidence. En effet, si l'on substitue les exponentiels aux sinus, l'on voit d'un coup-d'œil que l'on a

$$B=\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)^m-\frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1+e^{2x\sqrt{-1}}\right)^m.$$

Mais nous avons

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}}=\text{Cos}.2x\mp\sqrt{-1}\,\text{Sin}.2x,$$

ou bien

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}}=2\text{Cos}.^2x-1\mp 2\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\text{Cos}.x\ ;$$

partant, nous aurons

$$B=\frac{2^m\text{Cos}.^m x.\,e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\right)^m$$

$$-\frac{2^m\text{Cos}.^m x.\,e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\right)^m.$$

Il suit de là que, en vertu des deux équations

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}}=\text{Cos}.mx\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx$$

$$(\text{Cos}.x \mp \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)^m = \text{Cos}.mx \mp \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx\ ;$$

on a

$$B = \frac{2^m \text{Cos}.^m x}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos}.mx + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)(\text{Cos}.mx - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)$$

$$- \frac{2^m \text{Cos}.^m x}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos}.mx - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)(\text{Cos}.mx + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)\ ;$$

c'est-à-dire $B = 0$, quel que soit l'exposant m, entier ou fractionnaire.

Cette conclusion cesse pourtant d'être vraie, lorsque $x = \varpi$, car alors on a

$$\text{Sin}(m - 2n)x = \text{Sin}.(m - 2n)\varpi = \text{Sin}.m\varpi\ ;$$

n étant un nombre entier positif quelconque ; donc, en revenant sur nos pas, la première transformée sera

$$B = \frac{e^{m\varpi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(1+1)^m - \frac{e^{-m\varpi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(1+1)^m\ ;$$

puisque

$$e^{-2\varpi\sqrt{-1}} = e^{+2\varpi\sqrt{-1}} = \text{Cos}.2\varpi \mp \sqrt{-1}\,\text{Sin}.1\varphi = 1\ .$$

Ainsi nous aurons

$$B = 2^m \text{Sin}.m\varpi\ ,$$

ce qui donnera ces deux équations

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m\varpi = A' + 2^m\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}m\varpi\ ;$$

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m\varpi = A' - 2^m\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}m\varpi\ ;$$

A' étant ce que devient A lorsque l'on y fait $x=\varpi$.

Lorsque m est un nombre entier, positif ou négatif, l'on a $\mathrm{Sin.}m\varpi=0$, et par conséquent ces deux valeurs de $2^m\mathrm{Cos.}^m x$ coincident; mais, dans le cas où m est fractionnaire, il faut considérer les seconds membres de deux équations précédentes comme donnant deux des racines de l'équation

$$y^{\frac{1}{m}} - 2\mathrm{Cos.}\varpi = 0\ ;$$

laquelle revient à

$$y^{\frac{1}{m}} + 2 = 0\ ;$$

Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'y a en cela aucune contradiction; car, dans le cas de $x=\varpi$, on a

$$A' = \mathrm{Cos.}m\varpi.\left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} + \ldots\right)$$

ou bien

$$A' = (1+1)^m.\mathrm{Cos.}m\varpi = 2^m.\mathrm{Cos.}m\varpi\ ;$$

ainsi, les deux équations précédentes donnent

$$2^m.\text{Cos.}^m.\varpi = 2^m.(\text{Cos}.m\varpi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.m\varpi) \,,$$

$$2.^m\text{Cos.}^m\varpi = 2.^m(\text{Cos}.m\varpi - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.m\varpi) \,:$$

Donc, en remplaçant m par la fraction $\frac{p}{q}$, il viendra

$$\sqrt[q]{(\text{Cos}.\varpi)^p} = \text{Cos}.\,\frac{p\varpi}{q} \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}.\frac{p\varpi}{q} = \sqrt[q]{(-1)^p}$$

ce qui est un résultat exact, lorsque p et q sont des nombres entiers, comme nous le supposons.

M. Deflers avait aussi reconnu que la fonction désignée par B doit être nulle, en général; mais la démonstration que nous en donnons ici nous paraît directe et plus simple (voyez le volume cité, pag. 621).