ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 344 du XI.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 142-144

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__142_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 344 du XI.e volume de ce recueil ;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Cahors.

Théorème I. *De tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les* parallélogrammes conjugués *sont ceux dont l'aire est un* minimum.

Démonstration. Soit, en effet, EFHG (fig. 6) un parallélogramme non conjugué, circonscrit à une ellipse dont le point O est le centre. Par ce point O, soit mené un diamètre LM, parallèle à deux côtés opposés quelconques EF, GH de ce parallélogramme ; et, par les extrémités L, M de ce diamètre, soient menées à l'ellipse deux tangentes, rencontrant le côté EF en A et B, et son opposé GH en C et D. La figure ABDC sera évidemment un parallélogramme conjugué ; et ce parallélogramme aura même hauteur que EFHG, puisqu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ; mais, parce que EG est une tangente en un point différent de L, dont tous les points, autres que le point de contact, doivent être hors de l'ellipse, son point I d'intersection avec LM devra être sur le prolongement de cette droite, et il en sera de même, pour la même raison, du point K d'intersection de FH avec la même droite; IK sera donc plus grand que LM; GH=IK sera donc plus grand que CD=LM; la base du premier parallélogramme sera donc plus grande que celle du second; son aire sera donc aussi plus grande; le parallélogramme conjugué sera donc le parallélogramme *minimum*.

THÉORÈME II. De tous les parallélogrammes inscrits à une même ellipse, les parallélogrammes conjugués *sont ceux dont l'aire est un* maximum.

Démonstration. Soit EBFD (fig. 7) un parallélogramme non conjugué quelconque, inscrit à une ellipse dont le centre est O, intersection des deux diagonales de ce parallélogramme. Par ce centre O, soit mené le diamètre AC, conjugué de la diagonale BD; en joignant AD, AB, CD, CB, le parallélogramme ABCD sera un parallélogramme conjugué. Or, d'après cette construction, la tangente en A devant être parallèle à BD; d'où il suit que le point E doit être situé entre BD et cette tangente; que par conséquent des deux triangles de même base BED, BAD le dernier est celui dont la hauteur et conséquemment dont l'aire est la plus grande; et, comme, pour de semblables raisons, on prouverait la même chose du triangle BCD, comparé au triangle BFD, il faut en conclure que l'aire du parallélogramme conjugué ABCD est plus grande que celle de l'autre parallélogramme EBFD.

De ces deux théorèmes, on conclut, sans aucune difficulté, les deux autres théorèmes que voici:

THÉORÈME III. De toutes les ellipses inscrites à un même parallélogramme, celle qui a pour diamètres conjugués les deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés est aussi celle dont l'aire est un maximum.

THÉORÈME. IV. De toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme, celle qui a pour diamètres conjugués les deux diagonales de ce parallélogramme est aussi celle dont l'aire est un minimun.

Remarque. Ces théorèmes n'ont point leurs analogues pour l'hyperbole où les parallélogrammes inscrits et circonscrits ne sont point susceptibles de limites.