Statique. Démonstration analitique du parallélogramme des forces

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 261-268
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__261_0>

STATIQUE.

Démonstration analitique du parallélogramme des forces ;

Par M. B. D. C.

SOIENT X, Y deux forces appliquées, dans des directions perpendiculaires l'une à l'autre, à un même point fixe. On démontre, sans difficulté, que ces deux forces ont une résultante, déterminée de direction et d'intensité, appliquée au même point, comprise dans leur plan, et dirigée dans l'intérieur de l'angle qu'elles comprennent.

Soit Z cette résultante, et soit z l'angle que fait sa direction avec celle de l'une des composantes, celle de X, par exemple ; elle fera conséquemment, avec la direction de Y, un angle $\frac{\varpi}{2}-z$. Si donc X et Y sont données, il devra être possible d'en conclure Z et z ; de sorte qu'il doit exister deux équations de relation entre ces quatre quantités.

Supposons ces deux équations de relation connues ; on pourra alors renverser le problème et demander de déterminer X, Y en fonction de Z, z. Or, on sait que, si l'intensité des forces X, Y croît ou décroît proportionnellement, l'intensité de la force Z croît ou décroît dans le même rapport, sans que sa direction éprouve aucun changement ; d'où il suit que $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ doivent être de simples fonctions de l'angle donné z ; on doit donc avoir

$$X=Z\psi(z)\ , \qquad (1)$$

et l'on aura, par conséquent,

$$Y=Z\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\ ; \qquad (2)$$

ψ étant une fonction dont il s'agira d'assigner la forme.

Observons, avant d'aller plus loin, que si l'on avait $Y=0$, on devrait avoir $Z=X$ et $z=0$; et que si, au contraire, on avait $X=0$, on devrait avoir $Z=Y$ et $z=\frac{\varpi}{2}$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$\psi(0)=1\ , \quad \psi\left(\frac{\varpi}{2}\right)=0\,.$$

Cela posé, imaginons, par le point d'application des forces X, Y deux droites indéfinies, perpendiculaires entre elles, mais d'ailleurs d'une direction tout-à-fait arbitraire. Supposons seulement, pour fixer les idées, que l'une d'elles passe entre Z et Y, et désignons par v l'angle qu'elle fait avec la direction de X. Nous pourrons concevoir chacune de nos forces X, Y décomposées suivant ces deux droites ; les composans de X seront, par ce qui précède,

$$X\psi(v)\ , \quad X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\ ,$$

et celles de Y

$$Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\ , \quad -Y\psi(v)\ ;$$

en désignant donc par V la somme des composantes suivant la première direction, et par U la somme des composantes suivant la seconde, nous aurons

$$V=X\psi(\varphi)+Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),$$

$$U=X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-Y\psi(\varphi) ;$$

mais, en décomposant immédiatement la résultante Z suivant les deux mêmes directions, on doit parvenir aux mêmes résultats; de sorte qu'on doit avoir aussi

$$V=Z\psi(\varphi-z), \quad U=Z\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right];$$

égalant donc ces valeurs de V et U aux précédentes, nous aurons

$$Z\psi(\varphi-z)=X\psi(\varphi)+Y\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),$$

$$Z\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right]=X\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-Y\psi(\varphi) ;$$

ou, en mettant pour X, Y leurs valeurs (1, 2) et divisant par Z,

$$\psi(\varphi-z)=\psi(\varphi)\psi(z)+\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right), \qquad (3)$$

$$\psi\left[\frac{\varpi}{2}-(\varphi-z)\right]=\psi(z)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)-\psi(\varphi)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right). \qquad (4)$$

Ces équations doivent se vérifier pour toutes les valeurs de l'angle z, qui est tout-à-fait arbitraire; faisant donc dans la première $\varphi=z$, on aura

$$\psi(0) \text{ ou } 1=\{\psi(z)\}^2+\left\{\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\right\}^2\,; \qquad (5)$$

prenant ensuite la somme des quarrés des équations (1, 2) et ayant égard à celle-ci, il vient

$$X^2+Y^2=Z^2 \qquad \text{ou} \qquad Z=\sqrt{X^2+Y^2}\,;$$

c'est-à-dire que *la résultante de deux forces perpendiculaires l'une à l'autre est représentée en intensité par la diagonale du rectangle dans lequel deux côtés d'un même angle représentent les intensités des composantes* (*).

(*) On parvient aussi assez simplement à cette première relation ainsi qu'il suit : soient décomposées X, Y chacune en deux forces, l'une suivant Z et l'autre perpendiculaire à sa direction ; soient x, y les composantes respectives de X, Y suivant Z, et soient x', y' leurs composantes perpendiculaires à sa direction ; les trois systèmes

$$X\,,\ Y\,,\ Z\,,$$

$$x\,,\ x'\,,\ X\,,$$

$$y'\,,\ y\,,\ Y\,,$$

sont évidemment des systèmes semblables, dans lesquels conséquemment les puissances homologues, qui sont ici celles de même rang, doivent être proportionnelles. On a donc

$$\frac{x'}{Y}=\frac{X}{Z}\,, \qquad \frac{y'}{X}=\frac{Y}{Z}\,,$$

$$\frac{x}{X}=\frac{X}{Z}\,, \qquad \frac{y}{Y}=\frac{Y}{Z}\,;$$

c'est-à-dire,

Si, dans l'équation (4), on change v en $\frac{\varpi}{2}-v$ elle devient

$$\psi(v+z)=\psi(v)\psi(z)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right). \qquad (6)$$

Si, dans l'équation (3), on change respectivement v et z en $v+i$ et $z+i$, son premier membre ne devra en éprouver aucun changement, et conséquemment son second membre devra demeurer le même, et il en sera de même dans la seconde, si l'on change à la fois v et z en $v+i$ et $z-i$; il faudra donc que, dans le

---

$$x'=\frac{XY}{Z}, \qquad y'=\frac{XY}{Z},$$

$$x=\frac{X^2}{Z}; \qquad y=\frac{Y^2}{Z}.$$

Les deux composantes x', y' sont donc égales; et, comme elles sont directement opposées, elles doivent se détruire, comme on pouvait bien d'ailleurs le prévoir, puisque les quatre composantes x, y, x', y' doivent finalement se réduire à la force unique Z, et que déjà les deux premières agissent suivant sa direction.

On doit donc avoir, d'après cela,

$$Z=x+y=\frac{X^2}{Z}+\frac{Y^2}{Z},$$

et conséquemment

$$Z^2=X^2+Y^2.$$

C'est à cela finalement que se réduit le raisonnement de M. Laplace.

En mettant, dans cette équation, pour X, Y leurs valeurs (1, 2) et divisant par Z^2, on retombe sur l'équation (5).

J. D. G.

développement de leurs seconds membres, les coefficiens des diverses puissances de i soient séparément nuls ; ou, en d'autres termes, il faut que la somme des dérivées partielles du second membre de l'équation (3), et que la différence de celles du second membre de l'équation (6), prises par rapport à v et z, soient égales à zéro ; ce qui donne

$$\psi(v)\psi'(z)+\psi(z)\psi'(v)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)=0;$$

$$\psi(v)\psi'(z)-\psi(z)\psi'(v)+\psi\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)-\psi\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-v\right)=0,$$

d'où, en prenant la demi-somme,

$$\psi(v)\psi'(z)-\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=0. \ (*)$$

ou bien

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}{\psi(v)}.$$

(*) Si, dans cette équation, on fait $v=z$, elle devient

$$\psi(z)\psi'(z)-\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\psi'\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=0.$$

qui donne

$$[\psi(z)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right]^2=k.$$

On trouve ensuite $k=1$, ce qui ramène encore à l'équation (5).

A cause de l'indépendance de z et v, chacun des deux membres de cette dernière équation devra être égal à une constante que nous pourrons désigner par $-A$, en sorte que nous aurons

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=-A\ ;$$

mais l'équation (5) donne

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sqrt{1-[\psi(z)]^2}\ ;$$

donc

$$-\frac{\psi'(z)}{\sqrt{1-[\psi(z)]^2}}=A\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\psi(z)=\text{Cos.}(Az+B)\ ;$$

or, on a

$$\psi(0)=1 \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

donc

$$A=1\ , \qquad B=0\ ;$$

donc, on doit avoir simplement

$$\psi(z)=\text{Cos.}z\ ;$$

et par conséquent (1)

$$\text{Cos.}z=\frac{X}{Z}\ ;$$

c'est-à-dire que *la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent en intensité deux forces perpendiculaires l'une à* *l'autre, et que nous avons déjà vue représenter leur résultante en intensité, représente également cette résultante en direction.*

Il est d'ailleurs connu que le théorème une fois démontré pour deux composantes rectangulaires, rien n'est plus facile que de l'étendre à deux composantes formant entre elles un angle quelconque.

Au lieu de considérer à la fois les deux fonctions $\psi(v+z)$ et $\psi(v-z)$, on peut n'en considérer qu'une seule, en égalant à zéro soit la somme, soit la différence des dérivées, prises successivement par rapport à z et v, du second membre de l'une ou de l'autre des équations (3, 6), suivant celle qu'on voudra employer; chassant alors $\psi'(v)$ et $\psi'\left(\frac{\varpi}{2}-z\right)$ de l'équation résultante, au moyen des dérivées des deux équations

$$[\psi(z)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right]^2=1\ ;\quad [\psi(v)]^2+\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\right]^2=1\,,$$

on obtiendra, comme ci-dessus,

$$\frac{\psi'(z)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\frac{\psi'\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}{\psi(v)}\,.$$

Si l'on ajoute membre à membre les deux équations (3, 6), il viendra

$$\psi(v+z)+\psi(v-z)=2\psi(v)\psi(z)\,.$$

Développant le premier membre suivant les puissances de z, et divisant par $2\psi(z)$, on trouvera pour résultat final, sans le secours de l'intégration, et par un calcul très-simple que l'on peut voir à la page 14 du 1.er volume de la *Mécanique* de M. Poisson, $\psi(z)=\text{Cos.}z$.

TRIGONOMÉTRIE