ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution des deux derniers problemes de géométrie énoncés à la page 180 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 366-368
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__366_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux derniers problèmes de géométrie énoncés à la page 180 du présent volume ;

Par M. J. B. Durrande, licencié ès sciences, professeur de physique au collége royal de Cahors.

Théorème I. Tous les cylindres circonscrits à une même ellipsoïde, dans lesquels les plans des deux bases sont parallèles à celui de la ligne de contact de l'ellipsoïde avec la surface convexe du cylindre sont égaux en volume ; et ce volume est plus petit que celui de tous les autres cylindres que l'on pourrait circonscrire à cette ellipsoïde.

Démonstration. Soit un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, suivant les conditions requises dans l'énoncé; à l'ellipse, base du cylindre, circonscrivons un parallélogramme conjugué quelconque, dont nous ferons la base d'un parallélipipède circonscrit à ce cylindre; il est aisé de voir qu'il le sera également à l'ellipsoïde, et en sera un parallélipipède conjugué. Le parallélipipède et le cylindre, ayant même hauteur, auront leurs volumes dans le rapport des aires de leurs bases, que l'on sait être celui de 4 à ϖ et conséquemment dans un rapport constant; puis donc que le volume du parallélipipède conjugué circonscrit est constant (pag. 224 de ce volume), il s'ensuit que le volume du cylindre circonscrit l'est aussi.

Il n'est pas bien difficile maintenant de prouver que le volume de ce cylindre est *minimum*. Le volume de tout autre cylindre circonscrit serait en effet à celui du parallélipipède circonscrit correspondant, formé, comme nous l'avons dit ci-dessus, dans le rapport de ϖ à 4; mais le volume du parallélipède conjugué circonscrit est *minimum*, parmi les volumes de tous les parallélipipèdes circonscrits (pag. 224 de ce volume); il s'ensuit que le volume du cylindre circonscrit correspondant l'est aussi.

THÉORÈME II. Tous les cônes circonscrits à une même ellipsoïde, dans lesquels le plan de la base est parallèle à celui de la ligne de contact de l'ellipsoïde avec la surface convexe du cône, sont égaux en volume; et ce volume est plus petit que celui de tous les autres cônes que l'on pourrait circonscrire à cette ellipsoïde.

Démonstration. Soit un cône circonscrit à l'ellipsoïde, suivant les conditions requises dans l'énoncé; à l'ellipse, base du cône, circonscrivons (pag. 226 du présent volume) un triangle *minimum* quelconque, dont nous ferons la base d'un tétraèdre circonscrit à l'ellipsoïde, de même sommet que le cône; il est aisé de voir que ce tétraèdre sera (pag. 227 du présent volume), un tétraèdre *minimum* circonscrit. Le tétraèdre et le cône, ayant même hauteur, auront leurs volumes dans un rapport constant, qui sera celui des aires de leurs bases ; puis donc que le volume du tétraèdre est constant, il s'ensuit que le volume du cône circonscrit le sera aussi.

Il n'est pas bien difficile maintenant de prouver que le volume de ce cône est *minimum*. Le volume de tout autre cône circonscrit serait en effet à celui du tétraèdre circonscrit correspondant dans le rapport constant des aires de leurs bases ; puis donc qu'alors le tétraèdre circonscrit ne serait pas le tétraèdre *minimum*, le cône circonscrit ne pourrait l'être non plus.

Remarque. On démontrera, par un raisonnement tout-à-fait analogue, que les cylindres et cônes *maximums* inscrits à une même ellipsoïde, sont ceux qui sont circonscrits au parallélipipède et au tétraèdre *maximums* inscrits à cette ellipsoïde.