
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Solution du premier des deux problèmes de géométrie
proposés à la page 232 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 374-377

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__374_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1821-1822, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Solution du premier des deux problèmes de géométrie
proposés à la page 232 de ce volume ;*

Par M. GERGONNE.

PROBLÈME. *Les directions de deux systèmes de diamètres conjugués d'une même ellipse étant données ; assigner les directions et le rapport de grandeur de ses deux diamètres principaux ?*

Solution. Par le centre de l'ellipse , soit menée une droite arbitraire , et soit désigné par z l'angle inconnu qu'elle fait avec l'un des diamètres principaux. Représentons par $2x$ la longueur de ce diamètre , et par $2y$ la longueur de l'autre. Soient enfin α , β les angles connus que forment avec la droite indéfinie les deux diamètres du premier système , et α' , β' les angles que forment avec elle les deux diamètres du second ; ces mêmes diamètres formeront , avec le diamètre principal dont nous avons représenté la longueur par $2x$ des angles qui seront respectivement

$$z + \alpha , \quad z + \alpha' ,$$

$$z + \beta , \quad z + \beta' ;$$

et , par une propriété connue de l'ellipse , on devra avoir les deux équations

$$\left. \begin{aligned} y^2 + x^2 \operatorname{Tang.}(z + \alpha) \operatorname{Tang.}(z + \beta) &= 0, \\ y^2 + x^2 \operatorname{Tang.}(z + \alpha') \operatorname{Tang.}(z + \beta') &= 0; \end{aligned} \right\} (1)$$

desquelles il s'agit présentement de tirer la valeur de z et le rapport de x à y .

En faisant, pour abrégér, $\operatorname{Tang.}z = \nu$, et posant en outre

$$\operatorname{Tang.}\alpha = m, \quad \operatorname{Tang.}\alpha' = m',$$

$$\operatorname{Tang.}\beta = n, \quad \operatorname{Tang.}\beta' = n',$$

il vient

$$\operatorname{Tang.}(z + \alpha) = \frac{\operatorname{Tang.}z + \operatorname{Tang.}\alpha}{1 - \operatorname{Tang.}\alpha \operatorname{Tang.}z} = \frac{\nu + m}{1 - m\nu},$$

$$\operatorname{Tang.}(z + \beta) = \frac{\operatorname{Tang.}z + \operatorname{Tang.}\beta}{1 - \operatorname{Tang.}\beta \operatorname{Tang.}z} = \frac{\nu + n}{1 - n\nu};$$

$$\operatorname{Tang.}(z + \alpha') = \frac{\operatorname{Tang.}z + \operatorname{Tang.}\alpha'}{1 - \operatorname{Tang.}\alpha' \operatorname{Tang.}z} = \frac{\nu + m'}{1 - m'\nu},$$

$$\operatorname{Tang.}(z + \beta') = \frac{\operatorname{Tang.}z + \operatorname{Tang.}\beta'}{1 - \operatorname{Tang.}\beta' \operatorname{Tang.}z} = \frac{\nu + n'}{1 - n'\nu};$$

substituant ces valeurs dans les équations du problème, et chassant les dénominateurs, elles deviendront

$$\left. \begin{aligned} (1 - m\nu)(1 - n\nu)y^2 + (\nu + m)(\nu + n)x^2 &= 0, \\ (1 - m'\nu)(1 - n'\nu)y^2 + (\nu + m')(\nu + n')x^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

En éliminant l'une des deux inconnues x et y entre ces deux équations, l'autre disparaîtra aussi, et il viendra

$$(\nu+m)(\nu+n)(m'\nu-1)(n'\nu-1) - (\nu+m')(\nu+n')(m\nu-1)(n\nu-1) = 0;$$

ou, en développant et ordonnant,

$$\left. \begin{aligned} (mn-m'n')\nu^4 + (m'+n')(1+mn) \nu^3 + (m'+n')(1+mn) \nu^2 - (mn-mn') \\ - (m+n)(1+m'n') \nu - (m+n)(1+m'n') \end{aligned} \right| \nu - (mn-mn') = 0$$

ou encore

$$(mn-m'n')(\nu^4-1) + \{ (m'+n')(1+mn) - (m+n)(1+m'n') \} \nu(\nu^2+1) = 0;$$

supprimant donc le facteur ν^2+1 , qui ne saurait être nul, on parviendra à cette équation du second degré

$$(mn-m'n')\nu^2 + \{ (m'+n')(1+mn) - (m+n)(1+m'n') \} \nu - (mn-m'n') = 0;$$

qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\frac{2\nu}{1-\nu^2} = \frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn) - (m+n)(1+m'n')};$$

mais

$$\frac{2\nu}{1-\nu^2} = \frac{2\text{Tang. } z}{1-\text{Tang.}^2 z} = \text{Tang. } 2z;$$

donc finalement

$$\text{Tang. } 2z = \frac{2(mn-m'n')}{(m'+n')(1+mn) - (m+n)(1+m'n')};$$

Or, on a

$$mn - m'n' = \text{Tang.}\alpha \text{Tang.}\beta - \text{Tang.}\alpha' \text{Tang.}\beta' = \frac{\text{Sin.}\alpha \text{Sin.}\beta \text{Cos.}\alpha' \text{Cos.}\beta' - \text{Cos.}\alpha \text{Cos.}\beta \text{Sin.}\alpha' \text{Sin.}\beta'}{\text{Cos.}\alpha \text{Cos.}\beta \text{Cos.}\alpha' \text{Cos.}\beta'}$$

$$m + n = \text{Tang.}\alpha + \text{Tang.}\beta = \frac{\text{Sin.}(\alpha + \beta)}{\text{Cos.}\alpha \text{Cos.}\beta},$$

$$m' + n' = \text{Tang.}\alpha' + \text{Tang.}\beta' = \frac{\text{Sin.}(\alpha' + \beta')}{\text{Cos.}\alpha' \text{Cos.}\beta'},$$

$$1 + mn = 1 + \text{Tang.}\alpha \text{Tang.}\beta = \frac{\text{Cos.}(\alpha - \beta)}{\text{Cos.}\alpha \text{Cos.}\beta},$$

$$1 + m'n' = 1 + \text{Tang.}\alpha' \text{Tang.}\beta' = \frac{\text{Cos.}(\alpha' - \beta')}{\text{Cos.}\alpha' \text{Cos.}\beta'};$$

il viendra donc, en substituant,

$$\text{Tang.}2z = \frac{2(\text{Sin.}\alpha \text{Sin.}\beta \text{Cos.}\alpha' \text{Cos.}\beta' - \text{Cos.}\alpha \text{Cos.}\beta \text{Sin.}\alpha' \text{Sin.}\beta')}{\text{Cos.}(\alpha - \beta) \text{Sin.}(\alpha' + \beta') - \text{Cos.}(\alpha' - \beta') \text{Sin.}(\alpha + \beta)};$$

formule que l'on pourra encore écrire ainsi

$$\text{Tang.}2z = \frac{\text{Cos.}(\alpha' + \beta') \text{Cos.}(\alpha - \beta) - \text{Cos.}(\alpha + \beta) \text{Cos.}(\alpha' - \beta')}{\text{Sin.}(\alpha' + \beta') \text{Cos.}(\alpha - \beta) - \text{Sin.}(\alpha + \beta) \text{Cos.}(\alpha' - \beta')}.$$

L'angle z , que fait l'un des diamètres principaux avec notre droite indéfinie, étant connu par cette formule, le rapport de grandeur $\frac{y}{x}$ des deux diamètres principaux sera donné par l'une ou l'autre des équations (1), d'où l'on tire

$$\frac{y}{x} = \sqrt{-\text{Tang.}(z + \alpha) \text{Tang.}(z + \beta)} = \sqrt{-\text{Tang.}(z + \alpha') \text{Tang.}(z + \beta')}.$$

Tout ce qui précède s'applique au surplus littéralement à l'hyperbole, pourvu que, dans les dernières formules, on change le signe $-$ en $+$ sous les radicaux.