ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Addition à la solution insérée à la page 285 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 12 (1821-1822), p. 378-379
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1821-1822__12__378_0>

Addition à la solution insérée à la page 285 de ce volume ;

Par M. TÉDENAT, ancien recteur, correspondant de l'académie royale des sciences.

LE problème qu'il s'agissait de résoudre en cet endroit était le suivant : *Quelle est l'équation la plus générale des courbes qui jouissent de cette propriété que si, par chacun de leurs points, on leur mène une normale, terminée à l'axe des abscisses, cette normale a même longueur que l'ordonnée qui a son pied au même point de cet axe ?*

Nous avons prouvé, en l'endroit cité, que l'équation générale de ces courbes avait pour équation

$$y^2=2\varphi(x)\ ; \tag{1}$$

pourvu que la fonction φ fût de nature à satisfaire à l'équation

$$2\varphi(x)+[\varphi'(x)]^2=2\varphi[x+\varphi'(x)]\ , \tag{2}$$

où φ' désigne, comme à l'ordinaire, la fonction dérivée de φ.

En différentiant cette dernière, il vient

$$2\varphi'(x)+2\varphi'(x)\varphi''(x)=2[1+\varphi''(x)]\varphi'[x+\varphi'(x)]\ ,$$

ou, en transposant et décomposant,

$$[1+\varphi''(x)]\{\varphi'(x)-\varphi'[x+\varphi'(x)]\}=0\ ;$$

équation qui se décompose en ces deux-ci :

$$\varphi''(x)=-1\ , \qquad (3)$$

$$\varphi'(x)=\varphi'[x+\varphi'(x)] \qquad (4)$$

L'équation (3) donne, en intégrant,

$$\varphi(x)=A+Bx-\tfrac{1}{2}x^2\ ;$$

ce qui donne, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$y^2=2A+2Bx-x^2\ ,$$

équation d'un cercle d'un rayon quelconque, ayant son centre en l'un quelconque des points de l'axe des x.

Quant à l'équation (4), elle donne évidemment $\varphi'(x)=0$, d'où

$$\varphi(x)=A\ ,$$

ce qui donne, pour l'équation de la courbe cherchée ;

$$y^2=2A\ ,$$

équation de deux parallèles à l'axe des x, également distantes de part et d'autre de cet axe.

Nous avions déjà prouvé, *à posteriori*, que ce cercle et ces parallèles, qui d'ailleurs résolvent évidemment le problème, satisfaisaient aux équations (1, 2) ; mais nous n'avions pas su alors en déduire directement les équations de ces deux lignes.

La question serait présentement de savoir si une équation de la forme

$$\psi(x)=\psi[x+\psi(x)]$$

peut admettre d'autres solutions que la solution $\psi(x)=0$; et, au cas qu'elle en admît d'autres, quelles pourraient être ces solutions ? mais c'est une question que nous livrons à la sagacité du lecteur.