ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

# Géométrie élémentaire. Démonstration de la propriété de minimum dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère entre les surfaces des corps de même volume

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 13 (1822-1823), p. 132-140

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__132_0>

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

*Démonstration de la propriété de* minimum *dont jouissent la circonférence du cercle, entre les périmètres des figures planes de même surface, et la surface de la sphère entre les surfaces des corps de même volume;*

Par un ABONNÉ.
GERGONNE

ON a vu à la page 61 du présent volume, que, même en employant les puissans moyens que fournit la méthode des variations, il n'est pas du tout aisé d'établir la propriété dont jouit la sphère d'être le corps de moindre surface entre tous ceux de même volume, ou le corps de plus grand volume entre tous ceux de même surface. C'est pourtant là une propriété tellement saillante qu'on ne saurait trop s'efforcer d'en rendre la démonstration assez simple pour pouvoir l'introduire dans les élémens de géométrie, et tel est le but que nous nous proposons ici; Mais, comme la propriété dont jouit le cercle d'être la figure plane de moindre périmètre entre toute celle de même surface, ou la figure plane de plus grande surface entre celles de même périmètre, a une très-grande analogie avec celle-là, nous nous en occuperons également. Ce sujet a déja été traité à la page 338 du IV.$^e$ volume du présent recueil; et si nous y revenons de nouveau ici, c'est uniquement dans la vue de le présenter d'une manière plus simple.

*LEMME I. De tous les triangles de même base et qui ont leur sommet sur une même droite indéfinie, celui dans lequel la somme des deux autres côtés est la moindre possible, est celui dans lequel ces deux côtés font des angles égaux avec la droite indéfinie.*

*Démonstration.* Soient AB (fig. 11) la base commune à tous ces triangles, et DE la droite indéfinie sur la quelle leurs sommets doivent être situés; de l'une quelconque A des extrémités de cette base soit abaissée sur DE une perpendiculaire AF, prolongée au-delà de cette droite d'une quantité FG=FA. En quelque point C de DE que l'on veuille placer le sommet de l'un des triangles dont il s'agit, on aura toujours CG=CA; donc CA+CB sera la moindre possible, quand CG+CB sera la moindre possible; c'est-à-dire, lorsque le point C sera en ligne droite avec les points B et G; mais alors les angles BCE et GCD seront égaux, comme opposés par le sommet; puis donc que, par suite de la construction, les angles GCD et ACD sont aussi égaux; il s'ensuit que les angles ACD et BCD doivent aussi être égaux, comme nous l'avons annoncé.

*LEMME II. De tous les trapèzes qui ont bases égales et même hauteur, le trapèze isocèle, c'est-à-dire, celui dans lequel les deux côtés non parallèles sont égaux, est aussi celui dans lequel la somme des longueurs de ces deux côtés est la moindre possible.*

*Démonstration.* Soit AA′ (fig. 12) la base commune à tous ces trapèzes, et soit DE la droite indéfinie sur laquelle doit se trouver l'autre base; en portant la longueur de cette dernière sur AA′ de A′ en C, vers A, de quelque manière que l'on pose cette base BB′ sur DE, on aura toujours BC=B′A′; d'où il suit que, pour que AB+A′B′ soit la moindre possible, il sera nécessaire et il suffira que AB+BC soit elle-même la plus petite possible; donc (*Lemme I.*) les angles ABD et CBE devront être égaux; il en sera donc de même de leurs alternes internes BAC et BCA; on devra donc avoir AB=CB et par conséquent AB=A′B′. Le trapèze devra donc être isocèle, ainsi qu'il avait été annoncé.

***LEMME III.** De toutes les pyramides triangulaires qui ont pour base commune un même trapèze et dans lesquelles le sommet se trouve situé sur une même parallèle aux côtés parallèles de cette base, celle dans laquelle la somme des aires des faces latérales qui ont pour base les deux côtés non parallèles de ce trapèze est la moindre possible, est celle dans laquelle les plans de ces deux faces sont également inclinés sur le plan du trapèze.*

*Démonstration.* Soient AA′ et BB′ (fig. 13) les deux côtés parallèles d'un trapèze, base commune d'une suite de pyramides quadrangulaires de même hauteur, ayant toutes leurs sommets sur une même parallèle à ces deux droites, parallèle dont nous supposerons que la projection sur le plan de la base de la pyramide soit CC′ coupant en C et C′ respectivement les deux côtés non parallèles AB et A′B′ de cette base.

Des deux extrémités B et B′ de l'un BB′ des côtés parallèles du trapèze soient abaissées les perpendiculaires BD et B′D′ sur la direction du côté opposé AA′. Soient prolongés les côtés BA et B′A′ au-delà de A et A′ en E et E′, de telle sorte que CE et C′E′ soient égales à la hauteur commune de toutes nos pyramides. Des points E et E′ élevons des perpendiculaires sur CE et C′E′, terminées en F et F′ à leur rencontre avec les perpendiculaires élevées à CC′ en C et C′; enfin menons la droite FF′.

Considérons présentement une de nos pyramides, dont le sommet se projette au point G de CC′; menons, par ce point G, la droite KL perpendiculaire commune aux deux côtés parallèles du trapèze, et conséquemment égale à BD et B′D′. Menons les droites GF et GF′, et abaissons sur les directions de AB et A′B′ les perpendiculaires GH et GH′.

Si l'on joint le sommet de la pyramide au point H par une droite, cette droite sera évidemment la hauteur de la face latérale dont AB est la base; cette hauteur sera donc l'hypothénuse d'un triangle rectangle ayant GH pour l'un des côtés de l'angle droit et pour l'autre la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire, une longueur égale à CE; de sorte que la hauteur de cette face triangulaire aura pour expression

$$\sqrt{\overline{GH}^2+\overline{CE}^2}\ ;$$

or, les trois triangles rectangles semblables BDA, CEF et GHC donnent

$$AB:BD \text{ ou } KL::\begin{cases} GC:GH=\dfrac{KL}{AB}.GC\ , \\[2ex] CF:CE=\dfrac{KL}{AB}.CF\ ; \end{cases}$$

donc

$$\overline{GH}^2+\overline{CE}^2=\left(\frac{KL}{AB}\right)^2.(\overline{GC}^2+\overline{CF}^2)=\left(\frac{KL.FG}{AB}\right)^2\ ;$$

au moyen de quoi la hauteur de la face latérale dont la base est AB se trouvera simplement exprimée par

$$\frac{KL.FG}{AB}\ ;$$

et par conséquent l'aire de cette face aura pour expression

$$\frac{KL.FG}{2}\ .$$

Or, comme les circonstances sont absolument les mêmes de part et d'autre de la droite KL, il s'ensuit que l'aire de la face latérale dont la base est A′B′ devra avoir pour expression

$$\frac{KL.F'G}{2}\ ;$$

la somme des aires des deux faces latérales ayant pour bases AB et A′B′ aura donc pour expression

$$\frac{KL.FG}{2}+\frac{KL.F'G}{2} \text{ ou } \frac{KL}{2}.(FG+F'G)\ ;$$

à cause du facteur constant $\frac{KL}{2}$, il sera nécessaire et il suffira, pour que cette somme soit la moindre possible, que la somme GF+GF′ le soit elle-même, ce qui exigera (*Lemme I*) que le point G soit tellement situé sur CC′ que les angles FGC et F′GC′ soient égaux entre eux.

Les deux triangles rectangles FCG et F′C′G devront donc être semblables ; de sorte qu'on devra avoir

$$GC : GC' :: CF : C'F' ;$$

mais les triangles rectangles semblables déjà employés donnent

$$GH : GC :: CE : CF ,$$

$$GC' : GH' :: C'F' : C'E' ,$$

multipliant donc ces proportions terme à terme, il viendra, en réduisant

$$GH : GH' :: CE : C'E' ;$$

or, par construction, les deux derniers termes de cette proportion sont egaux ; donc, on doit avoir GH=GH′, ce qui montre que le point G doit être l'intersection de CC′ avec la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par les directions des côtés non parallèles AB et A′B′ du trapèze, base de la pyramide.

On voit de plus que les triangles rectangles formés par la hauteur de la pyramide, les perpendiculaires égales GH et GH′ et les hauteurs des deux faces latérales ayant pour bases AB et A′B′ seront égaux ; d'où il suit que les plans de ces faces seront également inclinés sur celui de la base de la pyramide, ainsi qu'on l'avait annoncé.

*LEMME IV. De tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les trois mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à leur direction commune, celui dans lequel la somme des aires des deux bases est la moindre possible est le tronc de prisme triangulaire isocèle, c'est-à-dire, celui dans lequel le plan qui passe par les milieux des trois arêtes latérales est perpendiculaire à leur direction commune.*

*Démonstration.* Soit *abc* (fig. 14) la section perpendiculaire aux arêtes AA′, BB′, CC′ d'un tronc de prisme triangulaire. Par l'un C′ des sommets de l'une des bases A′B′C′ soit conduit un plan

αβC

$\alpha\beta C'$, parallèle au plan de l'autre base ABC ; ce plan détachera du tronc une pyramide quadrangulaire, ayant pour base le trapèze $\alpha A'B'\beta$ et devant avoir son sommet en quelque point de la parallèle menée par le point $c$ aux deux bases du trapèze. En outre, les deux triangles ACB et $\alpha C'\beta$ seront égaux ; de sorte que, la face latérale AA'B'B étant donnée, pour que la somme $ACB+A'C'B'$ des aires des deux bases soit la moindre possible, il sera nécessaire et il suffira que la somme $\alpha C'\beta+A'C'B'$ des aires des faces latérales de la pyramide, ayant pour bases les côtés non parallèles $\alpha\beta$ et $A'B'$ du trapèze, soit la moindre possible, ce qui exigera (*Lemme III*) que l'arête CC' soit tellement située que les plans de ces deux faces soient également inclinés sur la base de ce trapèze ; d'où il résultera que les deux bases ACB et A'C'B' seront aussi également inclinées sur la face latérale ABB'A'.

Ainsi, les situations de deux des arêtes latérales du tronc étant données, la situation de la troisième qui rend *minimum* la somme des aires des deux bases est celle qui rend ces bases également inclinées sur le plan des deux autres arêtes ; d'où il suit que, pour que la somme des aires de ces bases soit un *minimum* absolu, il faut que leurs plans soient également inclinés sur celui de chacune des trois faces latérales ; or, c'est ce à quoi on parvient évidemment en plaçant les milieux $a$, $b$, $c$ des trois arêtes AA', BB', CC' sur le plan de la section perpendiculaire à leur direction commune ou, en d'autres termes, en rendant le tronc isocèle.

*THÉORÈME I. Entre toutes les figures planes de même surface, le cercle est celle qui a le moindre périmètre.*

*Démonstration.* Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, parmi les figures planes d'une même étendue donnée, celle de moindre périmètre est autre que le cercle ; et que c'est par conséquent une figure dans laquelle on pourra trouver deux cordes parallèles, infiniment voisines, qui n'auront pas leurs milieux sur une même perpendiculaire à leur direction commune.

Soit AA′ ( fig. 15 ) une de ces cordes, et soit MN la perpendiculaire indéfinie menée à sa direction par son milieu $a$ ; soit BB′ la corde consécutive à AA′, ayant son milieu $b$ hors de MN ; si l'on fait glisser cette corde BB′, jusqu'à ce que son milieu se trouve sur cette droite, en faisant suivre le mouvement à toute la partie intérieure de la figure ; sa surface totale n'en aura éprouvé aucun changement, mais la somme AB+A′B′ et conséquemment le périmètre ( *Lemme II* ) sera devenu moindre ; d'où l'on conclura que la surface proposée n'est pas celle de moindre périmètre, entre toutes celles qui lui sont équivalentes.

*Corollaire.* Il suit de là qu'entre toutes les surfaces planes de même périmètre, le cercle est celle de plus grande étendue. Supposons en effet que l'on prétende que la surface de moindre étendue, sous un périmètre donné $P$, soit une surface $S$ différente d'un cercle. Soit fait un cercle $C$ équivalent à $S$ ; son périmètre $Q$, par ce qui précède, sera $<P$ ; donc, si l'on fait un cercle $C'$ dont le périmètre soit $=P$, ce cercle aura une surface plus grande que $C$ et conséquemment plus grande que $S$ ; d'où il résultera que $S$ ne sera pas la plus grande surface contenue sous le périmètre $P$, comme on l'avait d'abord supposé.

*THÉORÈME II. De toutes les courbes planes qui, ayant une corde commune, enferment le même espace entre elles et cette corde, l'arc de cercle est celle de moindre longueur.*

*Démonstration.* Admettons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit l'arc de cercle $A$ et un arc d'une autre courbe, d'une longueur $C<A$ enfermant le même espace $S$, et soit achevée la circonférence. Supposons que la longueur du surplus soit $L$, et qu'elle enferme un espace $T$ ; nous aurions ainsi un même espace $S+T$ renfermé d'une part par une circonférence dont la longueur serait $A+L$, et d'une autre par une courbe non circulaire dont le périmètre serait $C+L<A+L$, ce qui est impossible ( *Théorème I* ).

*Corollaire.* Par un raisonnement tout semblable à celui dont nous avons fait usage dans le précédent corollaire, on démontrera qu'à l'inverse entre tous les arcs de courbes de même longueur, qui ont une corde commune, l'arc de cercle est celui qui renferme le plus grand espace entre lui et sa corde.

*THÉORÈME III. Entre tous les corps de même volume, la sphère est celui qui a la moindre surface.*

*Démonstration.* Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, parmi tous les corps d'un même volume donné, celui de moindre surface est autre que la sphère, et que c'est par conséquent un corps dans lequel on pourra trouver trois cordes parallèles infiniment voisines, au moins, non situées dans un même plan, dont les milieux ne soient pas dans un même plan perpendiculaire à leur direction commune.

Soit $c$ (fig. 16) le milieu d'une corde, et soit le plan de la figure un plan conduit par ce milieu, perpendiculairement à sa direction; soient $a$, $b$ les points où ce plan est percé par deux autres cordes parallèles à celle-là qui en soient infiniment voisines et qui ne soient pas situées dans le même plan avec elle; et supposons que ces deux nouvelles cordes n'aient point leurs milieux en $a$ et $b$. Concevons le plan de la figure partagé en un réseau de triangles infiniment petits, par les sommets desquels soient menées des cordes parallèles aux trois premières; ces cordes seront les arêtes latérales d'une suite de troncs de prismes triangulaires dont nos triangles seront des sections perpendiculaires aux arêtes.

Cela posé, on pourra faire glisser les cordes ou arêtes qui passent par $a$ et $b$, jusqu'à ce qu'elles aient leurs milieux en ces points. En opérant ainsi de proche en proche sur toutes celles des autres cordes qui n'auront pas leur milieu sur notre plan, jusqu'à ce qu'on les ait amenées à les y avoir toutes, on n'aura point changé le volume du corps dont il s'agit, tandis qu'on en aura (*Lemme IV*) diminué la surface; d'où l'on conclura que cette surface n'était pas la moindre de toutes celles qui pouvaient contenir le volume donné.

*Corollaire.* Il suit de là qu'entre tous les corps de même surface, la sphère est celui du plus grond volume. Supposons, en effet, que l'on prétende que le volume de moindre étendue, sous une surface donnée $S$, soit un volume $V$ différent de la sphère. Soit faite une sphère $\Sigma$ équivalente à $V$, sa surface $S'$ sera, par ce qui précède $<S$; donc, si l'on fait une sphère $\Sigma'$ dont la surface soit égale à $S$, cette sphère aura un volume plus grand que $\Sigma$, et conséquemment $>V$; d'où il résulterait que $V$ ne serait pas le plus grand volume contenu sous la surface $S$, ainsi qu'on l'avait supposé.

*THÉORÈME IV. De toutes les surfaces courbes qui, se terminant à une même circonférence de cercle, renferment le même volume entre elles et le plan de ce cercle, la calotte sphérique est celle de moindre étendue.*

*Démonstration.* Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit la calotte sphérique $C$ et une autre surface $S<C$ enfermant le même volume $V$ et soit achevée la sphère. Supposons que la surface du surplus soit $C'$ enfermant un volume $V'$; nous aurions donc ainsi un même volume $V+V'$ enfermé d'une part par une surface sphérique $C+C'$, et d'une autre par une surface moindre $S+C'$, ce qui est impossible (*Théorème III*) (*).

*Corollaire.* Par un raisonnement tout semblable à celui dont nous avons fait usage, dans le précédent corollaire, on démontrera qu'à l'inverse de toutes les surfaces courbes de même étendue, terminées à une même circonférence de cercle, la calotte sphérique est celle qui enferme le plus grand volume entre elle et ce cercle.

---

(*) Ceci explique, en particulier, pourquoi les bulles de savon sont sensiblement sphériques; elles le seraient rigoureusement si elles étaient partout d'une épaisseur uniforme, et si la pesanteur n'existait pas.

J. D. G.