ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Arithmétique. Addition à l'article sur les puissances et racines numériques, inséré à la page 359 du XII.e volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 163-174
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__163_0>

ARITHMÉTIQUE.

Addition à l'article sur les puissances et racines numériques, inséré à la page 359 du XII.e volume du présent recueil ;

Par M. QUERRET, chef d'institution à St-Malo (*).

Il a été observé, à l'endroit cité, qu'en posant successivement

$$\frac{m}{1}a+b\quad=A_2\,,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\,a^2+bA_1=A_2\,,$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,a^3bA_2=A_3\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,a^{m-3}+bA_{m-4}=A_{m-3}\,,$$

(*) Tout ce qu'on va lire se trouvait en substance dans l'article rappelé ; mais le défaut de développemens suffisans ne nous permit alors d'en comprendre que ce que nous en publiâmes.

J. D. G.

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} + bA_{m-3} = A_{m-2};$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} + bA_{m-2} = A_{m-1};$$

$$a^m + bA_{m-1} = A_m,$$

on avait

$$A_m = (a+b)^m;$$

et on a appliqué cette remarque à la formation du cube de 47

Nous remarquerons présentemeut que, si l'on pose successivemen.

$$\begin{aligned}
A_1 &+ b &= A'_1 &, \\
A_2 &+ bA'_1 &= A'_2 &, \\
A_3 &+ bA'_2 &= A'_3 &, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots &&, \\
A_{m-1} &+ bA'_{m-2} &= A'_{m-1} &,
\end{aligned}$$

on aura

$$A'_{m-1} = \frac{m}{1}(a+b)^{m-1};$$

qu'en posant ensuite

$$\begin{aligned}
A'_1 &+ b &= A''_1 &; \\
A'_2 &+ bA''_1 &= A''_2 &, \\
A'_3 &+ bA''_2 &= A''_3 &, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots &&,
\end{aligned}$$

$$A'_{m-2}+bA''_{m-3}=A''_{m-2} ;$$

on aura

$$A''_{m-2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(a+b)^{m-2} ;$$

qu'en posant encore

$$A''_1 \quad +b \qquad =A'''_1 ,$$

$$A''_2 \quad +bA'''_1 \quad =A'''_2 ,$$

$$A''_3 \quad +bA'''_2 \quad =A'''_3 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$A''_{m-3}+bA'''_{m-4}=A'''_{m-3} ,$$

on aura

$$A'''_{m-3}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}(a+b)^{m-3},$$

et ainsi de suite. On a donc ainsi

$$A_m \quad =(a+b)^m ,$$

$$A'_{m-1}=\frac{m}{1}(a+b)^{m-1} ,$$

$$A''_{m-2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(a+b)^{m-2} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$A_1^{(m-1)}=\frac{m}{1}(a+b) ,$$

$$A_0^{(m)} \quad =1 ;$$

d'où

$$(a+b+c)^m = A_m + cA'_{m-1} + c^2 A''_{m-2} + \ldots + c^{m-1} A_1^{(m-1)} + c^m.$$

Appliquons ce résultat à la formation de la cinquième puissance du nombre 473. Nous avons déjà trouvé, à l'endroit cité.

$$A_1 = 2070\,,$$
$$A_2 = 1744900\,,$$
$$A_3 = 762143000\,,$$
$$A_4 = 181350010000\,,$$
$$A_5 = 22934500700000\,;$$

d'après quoi on conclura successivement des précédentes formules, en prenant constamment 70 pour b,

$$A'_1 = \mathrm{d}140\,, \quad A''_1 = 2210\,, \quad A'''_1 = 2280\,, \quad A''''_1 = 2350$$

$$A'_2 = 1894700\,, \quad A''_2 = 2049400\,, \quad A'''_2 = 2209000\,,$$

$$A'_3 = 894772000\,, \quad A''_3 = 1038240000\,,$$

$$A'_4 = 243984050000\,,$$

22934500700000 .	1=	22934500700000
243984050000 .	3=	731952150000
1038240000 .	9=	9344070000
2209000 .	27=	59643000
2350 .	81=	190350
1 .	243=	243

On aura $(473)^3 = 23675856753593$.

En renversant le problème, on est conduit, pour l'extraction des racines à un procédé simple et uniforme, qui n'exige que l'emploi de l'addition et de la multiplication par des nombres d'un seul chiffre. Nous allons l'appliquer à un exemple, en nous bornant à la pratique; la théorie pouvant être aisément déduite de ce qui précède.

Soit un nombre entier dont il faille extraire la racine cinquième; et supposons qu'après l'avoir partagé en tranches de cinq chiffres chacune, en allant de droite à gauche, les trois premières tranches à gauche soient

2380,12582,56547 ,..........;

voici d'abord l'opération, dont nous expliquerons ensuite les détails.

$$
\begin{array}{l|l}
2380,12582,56547\ ,\ldots\ldots\ldots & 473\ldots\ldots\ldots \\
1024 & \\
\hline
135612582 & \\
126945007 & \\
\hline
\quad 866757556547 & \\
\quad 741356053593 & \\
\hline
\quad 125401502954\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

La racine cinquième en nombre entier de la dernière tranche à gauche étant 4, nous formerons le tableau suivant, dont nous allons expliquer l'organisation

40	1600	64000	2560000	
5	10	10	5	
200	16000	640000	12800000	(M)
7	1449	122143	5335001	
207	17449	762143	18135001	(N)
7	1498	132629	6263404	
214	18947	894772	24398405	
7	1547	143458		
221	20494	1038230		
7	1596			
228	22090			
7				
235				

On écrit d'abord les quatre premières puissances du premier chiffre 4 de la racine, en mettant à la droite de chacune autant de zéros qu'il y a d'unités dans le nombre qui en marque le degré. On écrit au-dessous les quatre coefficiens intermédiaires 5, 10, 10, 5 de la cinquième puissance d'un binome; et on prend les produits des nombres correspondans, ce qui forme une suite dont le dernier nombre est désigné par (M) et que nous appellerons *première suite*

Après

Après avoir écrit sous la dernière tranche du nombre proposé la cinquième puissance de 4 qui est 1024, on fait la soustraction, et on abaisse à la droite du reste la tranche suivante du nombre proposé, ce qui donne un *premier dividende* 135612582, dont la division par le nombre (M) donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre au-dessus de 9, et que le second chiffre de la racine ne pourra jamais excéder. On trouve ici 9.

En soumettant successivement 9 et 8 à la vérification que nous allons expliquer, on les trouve trop grands; on passe donc à 7 que l'on vérifie comme il suit:

Au moyen de la première suite, on forme la seconde et la troisième simultanément de la manière que voici: on écrit 7 sous le premier terme de la première suite, auquel on l'ajoute; on porte le produit de la somme par 7 sous le second terme de la première suite, auquel on l'ajoute; on porte le produit de la nouvelle somme par 7 sous le troisième terme de la première suite, auquel on l'ajoute également; et l'on continue ainsi, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à former le dernier terme de la *troisième suite* que nous avons désigné par (N). C'est parce que le produit de ce dernier terme par 7 est moindre que notre premier dividende que l'on reconnaît que le chiffre 7 peut être admis comme second chiffre de la racine. On porte ce produit sous le premier dividende, on fait la soustraction et l'on abaisse la troisième tranche à la droite du reste, ce qui donne un *second dividende* 866757556547.

Retournant alors de nouveau aux suites; de la troisième on déduit exactement la quatrième et la cinquième, en employant toujours le chiffre 7, de la même manière que la seconde et la troisième avaient été déduites de la première. Par le même procédé on déduit la sixième et la septième de la cinquième, mais en arrêtant celles-ci à un terme de moins; de la septième on déduit pareillement la huitième et la neuvième, que l'on arrête encore à un terme de moins; en poursuivant ainsi, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à deux dernières suites d'un seul terme.

Pour continuer l'opération , on formera le second tableau que voici , et dont nous allons expliquer la formation ,

2350	2209000	1038230000	243984050000	(M′)
3	7059	6648177	3134634531	
2353	2216059	1044878177	247118684531	(N′)
3	7068	6669381	3154642674	
2356	2223127	1051547558	250273327205	
3	7077	6690612		
2359	2230204	1058238170		
3	7086			
2362	2237290			
3				
2365				

La *première suite* de ce tableau est formée des derniers nombres des colonnes du précédent , à la droite de chacun desquels on a écrit autant de zéros qu'il y a d'unités dans le nombre qui en indique le rang. Le *second dividende* divisé par le dernier terme de cette suite , que nous avons désigné par (M′) , donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre supérieur à 9, et que le troisième chiffre de la racine ne pourra jamais excéder. On trouve ici 3 que l'on vérifiera en continuant exactement le second tableau avec lui comme on avait continué le premier avec 7. Lorsqu'on sera parvenu au dernier terme de la troisième série, que nous avons désigné par (N'), on verra que le produit de ce terme par 3 peut être retranché du second dividende; et c'est à ce caractère que l'on reconnaîtra que 3 peut être admis comme troisième chiffre de la racine. Portant donc le produit de (N') par 3 sous le second dividende, faisant la soustraction et abaissant à la droite du reste la quatrième tranche, on aura ainsi un *troisième dividende*. On achèvera le second tableau avec 3 comme on avait achevé le premier avec 7; et on se servira des derniers nombres de chaque colonne de ce dernier pour en commencer un troisième, qui devra être employé de la même manière que les deux premiers à trouver un nouveau chiffre de la racine.

Le procédé, dans chaque degré, est susceptible de quelques simplifications que nous n'avons pas cru devoir indiquer pour le cinquième, parce qu'elles rompent l'uniformité du calcul, sans l'abréger d'une manière notable. Cependant, comme elles ne sont pas à négliger, lorsqu'il est question de la racine cubique, nous allons montrer à quoi elles se réduisent dans ce cas.

Supposons qu'ayant à extraire la racine cubique d'un nombre entier et l'ayant partagé en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, les quatre premières tranches à gauche soient 671,507,968,841 ,.......; voici comment on disposera l'opération, dont nous allons expliquer les détails.

671,507,968,841;	8756.......		
512	19200	(M)	247
159507	1729		
146503	20929	(N)	
13004968	49		
11418875	2270700	(M′)	2615
1586093841	13175		
	2283775	(N′)	
	25		
	229687500	(M″)	26256
	157536		
	229845036	(N″)	
	36		
	23000260800	(M‴)	

La racine du plus grand cube contenu dans la dernière tranche à gauche 671 est 8 qu'on écrit à droite, comme premier chiffre de la racine; son cube 512 étant porté sous la tranche 671 on fait la soustraction, et, à la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, ce qui forme le *premier dividende*.

On écrit sous la racine 8 le triple de son quarré que l'on fait suivre de deux zéros, et l'on a ainsi le *premier diviseur*, que nous avons désigné par (M), et qui, divisant le premier dividende, donne un quotient entier qu'on ne doit jamais prendre supérieur à 9, et qui ne saurait être moindre que le second chiffre de la racine. Ce quotient serait ici 8; mais, en le soumettant à la vérification que nous allons indiquer pour 7, on s'assure que c'est ce dernier chiffre qui doit être admis.

Après avoir écrit 7 comme second chiffre de la racine, on écrira ce même chiffre 7 à part, sur la droite de (M), et à sa gauche le triple 24 du premier chiffre 8 de la racine; ce qui donnera le nombre 247, dont on portera le produit par 7 sous (M) auquel on l'ajoutera; ce qui donnera une somme que nous avons désignée par (N); et c'est parce que le produit de ce dernier nombre par 7 peut être retranché du premier dividende qu'on reconnaîtra que 7 peut être admis. Portant donc ce produit sous le dividende, faisant la soustraction et abaissant à la droite du reste la tranche suivante, on obtiendra ainsi le *second dividende*.

Pour continuer l'opération, on portera sous (N) le quarré 49 du second chiffre 7 de la racine; on fera la somme des trois nombres compris dans l'accolade, à la droite de laquelle on écrira deux zéros, et l'on aura ainsi le *second diviseur* que nous avons désigné par (M′), et qui, divisant le second dividende, donnera un quotient entier qu'il ne faudra jamais prendre au-dessus de 9 et qui ne pourra être inférieur au troisième chiffre de la racine. Ce quotient est ici 5, que l'on vérifiera ainsi qu'il suit.

Sur la droite de (M′) on écrira 5 et à sa gauche le triple 261 de la racine 87 déjà écrite; ce qui donnera le nombre 2615, dont on portera le produit par 5 sous (M′) auquel on l'ajoutera; on aura ainsi une somme que nous avons désignée par (N′); et c'est parce que le produit de cette somme par 5 peut être retranché du second dividende qu'on reconnaîtra que le chiffre 5 peut être admis comme troisième chiffre de la racine. Portant donc sous ce second dividende le produit de (N′) par 5, faisant la soustraction, et abaissant à la droite du reste la tranche suivante, on obtiendra le *troisième dividende*.

Pour continuer l'opération, on écrira sous (N′) le quarré 25 du dernier chiffre 5 trouvé à la racine; on prendra la somme des trois nombres compris dans l'accolade, à la droite de laquelle on écrira deux zéros, ce qui donnera le *troisième diviseur* qui, divisant le troisième dividende fera connaître le quatrième chiffre 6 du quotient, que l'on vérifiera de la même manière que les précédens.