ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VERNIER

Géométrie transcendante. Solution d'un problème de géométrie, dépendant des équations aux différences mêlées

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 258-266
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__258_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Solution d'un problème de géométrie, dépendant des équations aux différences mêlées;

Par M. Vernier, professeur de mathématiques au collége royal de Caen, ancien élève de l'école normale.

PROBLÈME. *Trouver la courbe plane sur laquelle un point lumineux, parvenant d'un point donné de son plan, dans quelque direction que ce soit, après avoir subi deux réflexions, retourne au point même de départ?* (*)

Solution. Soient O le point donné, P, P′ les points de la courbe où les deux réflexions consécutives doivent avoir lieu; il faudra donc que, quelle que puisse être la direction primitive OM, en menant les normales PN, P′N′, on ait *Ang*. OPN $=$ *Ang* NOP′ et *Ang*. PP′N′ $=$ *Ang* N′P′O.

Soit pris le point O pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient x, y les coordonnées du point P et soient x', y' celles du point P'; et soient enfin désignées par Δx, Δy, respectivement, les différences $x'-x$, $y'-y$.

(*) Ce problème, proposé dans les *Acta eruditorum* (septembre 1745), a été traité pour la première fois par Euler (même recueil, 1746). M. Biot s'en est aussi occupé (*Mémoires présentés à l'Institut*, tom. I). Voyez le *Traité des différences et des séries* de M. Lacroix, pag. 588.

J. D. G.

Concevons une ellipse qui, ayant les points O et P pour foyers, passe par le point P'; par la propriété fondamentale de cette courbe les coordonnées x', y' satisferont à l'équation

$$\sqrt{x'^2+y'^2}+\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}=\text{Constante.}$$

La différentielle de cette équation, prise en considérant x', y' comme variables et x, y comme constans, et en remplaçant respectivement $x'-x$ et $y'-y$ par $\Delta x, \Delta y$ est

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}+\left\{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right\}\frac{dy'}{dx'}=0\,;$$

Or, par les propriétés connues de l'ellipse, les lois de la réflexion et la nature du problème, il est aisé de voir qu'au point (x', y') l'ellipse dont il s'agit doit avoir un élément commun et par conséquent une tangente commune avec la courbe cherchée, de sorte que, dans l'équation ci-dessus, le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dx'}$ de l'ellipse peut être remplacé par celui de cette courbe. Désignant donc ce dernier par p' et substituant, notre équation pourra être mise sous la forme

$$\frac{1+p'\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}=-\frac{1+p'\frac{y'}{x'}}{\sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}}\,;$$

ce qui donne, en quarrant, chassant les dénominateurs et transposant

$$\left\{1+p'\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right\}-\left\{1+p'\frac{y'}{x'}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}=0\,;$$

cette équation est évidemment satisfaite en posant

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y'}{x'}\ ;$$

mais c'est une valeur introduite par l'élévation au quarré, puisqu'elle ne satisfait pas à l'équation sous sa première forme.

En faisant le développement, l'équation peut être mise sous cette forme

$$\left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{y'}{x'}\right\}\left\{\left(p'^2-2p'\frac{y'}{x'}-1\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\left(p'^2\frac{y'}{x'}+2p'-\frac{y'}{x'}\right)\right\}=0\ ;$$

et donne conséquemment, pour la véritable valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p'^2y'+2p'x'-y'}{x'+2p'y'-p'^2x'}\ . \qquad (1)$$

La considération d'une seconde ellipse qui, ayant pour foyers les points O et P′, passerait par le point P, donnera pareillement, en désignant par P le coefficient différentiel au point O,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p^2y+2px-y}{x+2py-p^2x}\ . \qquad (2)$$

Les équations aux différences mêlées (1, 2) ne paraissent facilement intégrales que dans le cas où le point O est infiniment éloigné ; c'est-à-dire, dans le cas où les rayons PO et P′O sont parallèles. Alors x et x' sont respectivement infinis par rapport à y et y', ce qui réduit les équations (1, 2) aux suivantes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2}\ , \qquad (3) \qquad\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p'}{1-p'^2}\ , \qquad (4)$$

ce qui donne

$$\frac{2p}{1-p^2}=\frac{2p'}{1-p'^2}\ ;$$

d'où résultent ces deux valeurs

$$p=p' , \qquad p=-\frac{1}{p'} .$$

Occupons-nous d'abord de l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2} ;$$

dans le cas où on a $p=p'$; c'est-à-dire, dans le cas où les tangentes à la courbe en P et P′ sont parallèles. Soit $y=f(x)$ d'où

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) ,$$

et soit $f'(x)$ la dérivée de y ou $f(x)$, de manière qu'on ait $p=f'(x)$; nos équations seront alors

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2f'(x)}{1-[f'(x)]^2} , \quad f'(x)=f'(x+\Delta x) .$$

La première revient à

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{2f'(x).\Delta x}{1-[f'(x)]^2} ; \qquad (5)$$

en la différentiant, la différentielle de son premier membre sera

$$f'(x+\Delta x)(1+d.\Delta x)-f'(x)$$

en y mettant pour $f'(x+\Delta x)$ sa valeur $f'(x)$, donnée par la seconde équation, cette différentielle se réduira à $f'(x).d.\Delta x$; de sorte qu'on aura

$$f'(x).d\Delta x=d.\frac{2f'(x).\Delta x}{1-[f'(x)]^2} .$$

Cette équation différentielle entre $f'(x)$ et Δx s'intègre facilement et donne, comme on peut le vérifier par la différentiation,

$$\Delta x = C \cdot \frac{1-[f'(x)]^2}{[f'(x)]^2};$$

en mettant cette valeur dans l'équation (5), elle devient

$$f\left\{x + C \cdot \frac{1-y'^2}{y'^2}\right\} - y = \frac{2C}{y'}, \qquad \text{(A)}$$

où, pour plus de simplicité, nous avons mis y et y' pour $f(x)$ et $f'(x)$.

Posons $x=\varphi(z)$, φ étant une fonction de la variable indépendante z de telle forme qu'on ait

$$x + C \cdot \frac{1-y'^2}{y'^2} = \varphi(z+1). \qquad \text{(B)}$$

Posons encore $y=f(x)=f[\varphi(z)]=\psi(z)$; puisque $y'=\frac{dy}{dx}$, nous aurons aussi $y'=\frac{d.\psi(z)}{d.\varphi(z)}$; au moyen de quoi les équations (A et B) deviendront, en n'écrivant, pour plus de simplicité, que les caractéristiques des fonctions,

$$\psi_1 - \psi = 2C\,\frac{d\varphi}{d\psi}; \qquad \text{(A')}$$

$$\varphi_1 - \varphi = C\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 - C. \qquad \text{(B')}$$

Cela posé, l'équation $f'(x)=f'(x+\Delta x)$ prouve que $\frac{dx}{dy}$ ne change pas, lorsque x se change en $x+\Delta x$, ce qui prouve que $\frac{d\varphi}{d\psi}$ ne doit pas changer non plus, lorsque z devient $z+1$. Donc $\frac{d\varphi}{d\psi}$ est égal à une fonction arbitraire g, qui ne change pas, lorsque z devient $z+1$; de sorte qu'on a

$$\psi_1-\psi=2Cg\ ; \qquad \varphi_1-\varphi=Cg^2-C\ ,$$

d'où l'on tire

$$\psi=2Cgz+m\ , \qquad \varphi=C(g^2-1)z+n\ ,$$

g, m, n étant des fonctions arbitraires de z dont la différence doit être nulle, mais qui ne sont pas indépendantes entre elles ; car, comme on a supposé $g=\frac{d\varphi}{d\psi}$, il faut qu'on ait

$$g=\frac{Cg^2-c+2Cgzg'+n'}{2Czg'+2Cg+m'}\ ,$$

g', m', n' étant les dérivées respectives de g, m, n, prises par rapport à z. Cette équation de condition se réduit à

$$Cg^2+m'g+(C-n')=0\ ,$$

d'où

$$g=\frac{-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2}}{2C}\ .$$

et les valeurs de φ et ψ, c'est-à-dire de x et y seront, en conséquence

$$x=(-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2})\cdot\frac{z}{4C}-Cz+n\ ;$$

$$y=(-m'+\sqrt{m'^2+4Cn'-4C^2})z+m\ .$$

Passons au second des deux cas pour lesquels on peut facilement intégrer les équations du problème, c'est-à-dire au cas où l'on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{1-p^2}\ ; \qquad p=-\frac{1}{p'}\ ;$$

et où, par conséquent, les tangentes en (x, y) et (x', y') sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Posons encore

$$y=\mathrm{f}(x) \quad \text{et} \quad p=\mathrm{f}'(x);$$

nos deux équations deviendront

$$\frac{\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)}{\Delta x}=\frac{2\mathrm{f}'(x)}{1-[\mathrm{f}'(x)]^2}, \quad \mathrm{f}'(x)=-\frac{1}{\mathrm{f}'(x+\Delta x)}.$$

Posons ensuite $x=\varphi(z)$, φ étant une fonction de la variable indépendante z de telle forme qu'on ait

$$x+\Delta x=\varphi(z+1).$$

Posons enfin $y=\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}[\varphi(z)]=\psi(z)$; nous aurons, comme ci-dessus,

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{d\psi}{d\varphi}, \qquad \mathrm{f}'(x+\Delta x)=\frac{d\psi_1}{d\varphi_1};$$

au moyen de quoi nos deux équations deviendront

$$\psi_1-\psi=(\varphi_1-\varphi)\cdot\frac{2d\psi.d\varphi}{d\varphi^2-d\psi^2}, \qquad \frac{d\psi}{d\varphi}=-\frac{1}{\frac{d\psi_1}{d\varphi_1}}.$$

Soit $\frac{d\psi}{d\varphi}=u$; la deuxième équation deviendra $uu_1=-1$, et pourra s'intégrer. En effet, remplaçant u_1 par $u+\Delta u$, elle deviendra $u^2+u\Delta u=-1$, d'où $u+\Delta u=-1\frac{1}{u}$, et par suite

$$2u+\Delta u=u-\frac{1}{u}.$$

Or, la différence du second membre est nulle; car, si z se change en $z+1$, il devient $-\frac{1}{u_1}+u_1$, qui est la même chose que $-\frac{1}{u}+u$, puisque l'équation $uu_1=-1$ donne

$u=$

$$u=-\frac{1}{u_1} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{u}=u_1\ ;$$

on a donc

$$2u+\Delta u=g\ ,$$

g étant une fonction de z dont la différence est nulle ; d'où l'on tire, en intégrant, par la méthode connue,

$$u=\frac{d\psi}{d\varphi}=g+(-1)^z\sqrt{1+g^2}\ .$$

Revenant ensuite à l'équation

$$\psi_1-\psi=(\varphi_1-\varphi)\ .\ \frac{2d\psi.d\varphi}{d\varphi^2-d\psi^2}\ ;$$

elle pourra être mise sous la forme

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\psi_1-\psi}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\psi}-\frac{d\psi}{d\varphi}\right)$$

puis donc qu'on a $\frac{d\psi}{d\varphi}=u$, elle deviendra

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\psi_1-\psi}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right)=-\frac{\psi_1-\psi}{2}g\ ;$$

donc

$$\varphi=-\frac{g}{2}\psi+k\ ,$$

k étant une fonction arbitraire de z dont la différence est nulle.

Il reste donc à obtenir une seconde intégrale. Pour cela, nous donnerons à celle que nous venons d'obtenir la forme suivante

$$\psi=-\frac{2}{g}\varphi+\frac{2k}{g}\ ,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dz}=\frac{2g'}{g^2}\varphi-\frac{2}{g}\varphi'-\frac{2kg'}{g^2}+\frac{2k'}{g}\ ;$$

mais on a, comme nous l'avons vu tout à l'heure,

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=g+(-1)^z\sqrt{1+g^2}\ ,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dz}=\frac{d\varphi}{dz}\{g+(-1)^{\tau}\sqrt{1+g^2}\};$$

égalant donc ces deux valeurs de $\frac{d\psi}{dz}$, on aura

$$\varphi'\left\{g+(-1)^{\tau}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}\right\}-\frac{2g'}{g^2}\varphi+\frac{2kg'}{g^2}-\frac{2k'}{g}=0.$$

Posons

$$R=\frac{-\frac{2g'}{g^2}}{g+(-1)^{\tau}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}}=\frac{-g'}{g^3+(-1)^{\tau}.g^2.\sqrt{1+g^2}+2g},$$

$$V=\frac{\frac{2kg'}{g^2}-\frac{2k'}{g}}{g+(-1)^{\tau}\sqrt{1+g^2}+\frac{2}{g}}=\frac{2kg'-2gk'}{g^3+(-1)^{\tau}.g^2.\sqrt{1+g^2}+2g};$$

alors la valeur de φ dépendra de l'équation linéaire du prèmier ordre

$$\varphi'+R\varphi+V=0;$$

d'où on tirera, en intégrant,

$$\varphi=-e^{-\int R\,dz}\{\int Ve^{\int R\,dz}+C\},$$

C étant une constante arbitraire. Cette équation jointe à l'équation

$$\varphi=-\frac{g}{2}\psi+k,$$

donnera, pour résoudre le problème, deux équations en φ, ψ, z ou en x, y, z, renfermant deux fonctions arbitraires à différence nulle, et en outre une constante arbitraire.

Par la difficulté d'intégrer les équations du problème, dans les deux cas particuliers que nous venons de traiter, et par la complication des résultats, on peut juger des obstacles que présenterait l'intégration dans le cas général. Toutefois nous osons croire que l'essai qui précède sera reçu avec quelque indulgence par les géomètres qui savent combien est peu avancée encore la théorie des équations aux différences mêlées.