ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Démonstration de M. Querret, chef d'institution à St-Malo

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 321-328
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__321_1>

Démonstration de M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

Soient x *et* y les coordonnées de l'une des courbes, rapportées à son centre et à ses axes ; elle aura pour équation

$$y^2=x^2-A^2.$$

Soit z la tangente tabulaire de l'angle que forme cette courbe ou sa tangente avec l'axe des x ; on aura

$$z=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

L'équation de l'autre courbe, rapportée aux mêmes axes que la première, lesquels en seront les asymptotes, sera

$$xy=B^2 .$$

Soit z' la tangente tabulaire de l'angle que forme cette courbe ou sa tangente avec l'axe des x, on aura

$$z'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} :$$

Au point d'intersection, x et y seront les mêmes dans les deux courbes, d'où il suit qu'on aura alors

$$zz'=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x}\right)=-1 , \quad \text{ou} \quad 1+zz'=0 ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Ce théorème n'est au surplus qu'un cas particulier du suivant ;

Une hyperbole étant donnée, si l'on en construit une autre dont les asymptotes soient dirigées suivant deux quelconques de ses diamètres, et que sur les mêmes diamètres comme conjugués, on construise une ellipse, les tangentes aux deux hyperboles à leur point d'intersection seront parallèles à un même système de cordes supplémentaires de cette ellipse, construites sur l'un ou l'autre de ces deux diamètres.

Si en effet on prend le diamètre transverse de la première hyperbole pour axe des x et son conjugué pour axe des y, l'équation de cette hyperbole sera

$$B^2x^2-A^2x^2=A^2B^2 ;$$

et l'équation de l'autre sera

$$xy=C^2 .$$

Soient z et z' les rapports des sinus des angles que font les deux courbes ou leurs tangentes avec les axes des x et des y ; on aura

$$z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B^2x}{A^2y}\ , \qquad z'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}\ ,$$

d'où on conclura, pour le point d'intersection,

$$zz'=-\frac{B^2}{A^2}\ , \quad \text{ou} \quad A^2zz'+B^2=0\ .$$

Or, cette équation est précisément celle qui doit exister, pour les cordes supplémentaires de l'ellipse, entre les quantités analogues à z et z' ; d'où il suit que si, par l'extrémité de l'un quelconque des deux diamètres conjugués de cette courbe qui lui sont communs avec la première des deux hyperboles on lui mène une corde parallèle à la tangente à l'une de ces hyperboles au point où elles se coupent, la supplémentaire de cette corde sera parallèle à la tangente à l'autre courbe au même point.

Il ne serait pas difficile de démontrer, au surplus que, deux hyperboles ayant même centre, si les asymptotes de l'une d'elles sont dirigées suivant deux diamètres conjugués de l'autre, les asymptotes de celles-ci seront réciproquement dirigées suivant deux diamètres conjugués de la première ; de manière que, pour le même système d'hyperboles, on peut obtenir deux ellipses qui jouissent de la proprieté qui vient d'être démontrée.

Si la première hyperbole est équilatère, et qu'on prenne ses diamètres principaux pour asymptotes de la seconde, qui alors sera également équilatère; l'ellipse deviendra évidemment un cercle, dans lequel les cordes supplémentaires sont constamment rectangulaires; donc alors les deux hyperboles se couperont à angles droits.

Le théorème qui vient d'être démontré a quelque analogie avec le suivant, qui nous paraît digne de remarque :

Une ellipse et une hyperbole qui ont le même centre et les foyers communs se coupent toujours perpendiculairement.

Ce théorème peut aisément se démontrer comme il suit. Soit c l'excentricité commune ; les équations des deux courbes rapportées à leurs diamètres principaux seront

$$B^2x^2+(B^2+c^2)y^2=B^2(B^2+c^2) \ ; \qquad (1)$$

$$B'^2x^2-(c^2-B'^2)y^2=B'^2(c^2-B'^2) \ ; \qquad (2)$$

d'où on tirera ; par différentiation

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{B^2x}{(B^2+c^2)y}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=+\frac{B'^2x}{(c^2-B'^2)y}\ ;$$

de sorte qu'en représentant par z' et z'' les tangentes tabulaires des inclinaisons des deux courbes sur l'axe des x, il viendra

$$z'=-\frac{B^2x}{(B^2+c^2)y}\ , \qquad z''=+\frac{B'^2x}{(c^2-B'^2)y}\ .$$

En éliminant B^2 et B'^2 entre ces formules et les équations (1, 2), il viendra

$$xyz'^2+(x^2-y^2-c^2)z'-xy=0\ ,$$

$$xyz''^2+(x^2-y^2-c^2)z''-xy=0\ ,$$

donc, pour un point (x, y) d'intersection des deux courbes, z' et z'' sont racines de la même équation du second degré

$$z^2+\frac{x^2-y^2-c^2}{xy}z-1=0\ ;$$

d'où il suit qu'on doit avoir

$$z'z''=-1\ , \qquad \text{ou} \qquad 1+z'z''=0$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Cette proposition peut au surplus être immédiatement prouvée comme il suit. En représentant par A et A' les demi-premiers axes de l'ellipse et de l'hyperbole les distances du centre aux points d'intersection de l'axe des x avec la tangente à la première courbe et avec la normale à la seconde seront, comme l'on sait

$$\frac{A^2}{x}, \qquad \frac{(A'^2+B'^2)x}{A'^2}$$

ou bien

$$\frac{B^2+c^2}{x}, \qquad \frac{c^2x}{c^2-B'^2};$$

mais, au moyen des équations (1, 2), on trouve pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes

$$x=\frac{\sqrt{(B^2+c^2)(c^2-B'^2)}}{c};$$

or, en subsituant cette valeur dans les deux expressions ci-dessus; elles deviennent également

$$c\sqrt{\frac{B^2+c^2}{c^2-B'^2}}=c\frac{A}{A'};$$

donc la normale à l'hyperbole, à l'intersection des deux courbes, coïncide avec la tangente à l'ellipse au même point, d'où il suit que les deux courbes se coupent perpendiculairement en ce point.

Nous venons de trouver pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes

$$x=\frac{\sqrt{(c^2+B^2)(c^2-B'^2)}}{c}=\frac{AA'}{c};$$

en substituant cette valeur dans l'une quelconque des équations (1, 2), on en tirera

$$y=\frac{BB'}{c}\;;$$

c'est-à-dire que chaque coordonnée de l'intersection des deux courbes est une quatrième proportionnelle à l'excentricité commune et aux moitiés des deux axes qui lui sont parallèles.

Si l'on conçoit que, l'un des foyers communs restant fixe, l'autre s'en éloigne continuellement et indéfiniment, la proposition énoncée ne cessera pas pour cela d'avoir lieu; elle aura donc lieu encore lorsque ce foyer sera infiniment éloigné du premier, auquel cas les deux courbes deviendront des paraboles; donc, *deux paraboles qui ont même axe et même foyer se coupent toujours perpendiculairement*; pourvu toutefois que leurs courbures soient en sens inverse ou, en d'autres termes, que le foyer commun soit situé entre les deux sommets.

Cette dernière proposition peut, au surplus, se démontrer directement comme il suit. Soient c et c' les distances des sommets au foyer commun; en prenant ce foyer pour origine, les équations des deux courbes seront

$$y^2=4c^2+4cx\;; \qquad y^2=4c'^2-4c'x\;.$$

Soient z' et z'' les tangentes tabulaires des inclinaisons des deux courbes sur l'axe des x, nous aurons

$$z'=\frac{dy}{dx}=\frac{2c}{y}\;, \qquad z''=\frac{dy}{dx}=-\frac{2c'}{y}\;,$$

éliminant c et c' entre ces équations et celles des deux courbes, il viendra

$$yz'^2+2xz'-y=0\;,$$

$$yz''^2+2xz''-y=0\;;$$

donc, pour le point (x, y) d'intersection des deux courbes, z' et z'' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$z^2+2\frac{x}{y}z-1=0\ ;$$

d'où il suit qu'on doit avoir

$$z'z''=-1\ , \qquad \text{ou} \qquad 1+z'z''=0\ ,$$

ce qui prouve la proposition annoncée.

On peut encore remarquer que la distance du foyer commun au point où la tangente à la première parabole rencontre son axe est, en général,

$$-2c-x\ ;$$

et que la distance du même point à celui où la normale à la seconde rencontre le même axe est

$$-2c'+x\ ;$$

mais les équations des deux courbes donnent pour l'abscisse de leur point d'intersection

$$x=c'-c\ ;$$

substituant donc dans les deux expressions ci-dessus, elles deviennent également

$$-(c+c')$$

ce qui montre que, pour le point d'intersection des deux courbes, la tangente à la première coïncide avec la normale à la seconde, et qu'ainsi elles se coupent perpendiculairement.

En substituant dans l'équation de l'une quelconque des deux courbes la valeur $x=c'-c$ de l'abscisse de leur point d'intersection, on obtient pour son ordonnée

$$y = 2\sqrt{cc'}.$$