ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Autre démonstration du même théorème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 330-332
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__330_1>

Autre démonstration du même théorème ;

Par M. Querret, chef d'institution à St-Malo.

Observons d'abord que, lorsqu'un cercle et une ellipse, situés dans un même plan, n'ont qu'un seul point commun, ils ont nécessairement la même tangente en ce point. Car, si la tangente à l'ellipse n'était pas en même temps tangente au cercle, le centre de celui-ci serait hors de la normale du point de contact; de sorte qu'en menant de ce centre une autre normale, elle serait plus courte que le rayon, d'où il suit que l'ellipse aurait un point intérieur au cercle qui, conséquemment, devrait la couper en deux points au moins.

Observons encore que si un cercle et une ellipsoïde engendrée par la résolution d'une ellipse autour de son grand axe n'ont qu'un seul point commun, la tangente au cercle en ce point sera située dans le plan tangent à l'ellipsoïde au même point. En effet, le plan du cercle détermine dans l'ellipsoïde une section elliptique qui n'a qu'un point commun avec ce cercle et qui a pour tangente en ce point l'intersection de ce plan avec le plan tangent à l'ellipsoïde, intersection qui doit être tangente au cercle par ce qui précède.

Cela posé; soient A, B, C (Fig. 6) les trois points dont il s'agit, et O le point du plan donné dont la somme des distances à ces trois-là est un *minimum*. Conduisons par OA et par la perpendiculaire A a, le plan AOa perpendiculaire à ce plan; et du pied a de la perpendiculaire Aa, comme centre et avec aO pour rayon, décrivons un cercle dans le même plan. Il est clair que ce cercle aura pour tangente en O la perpendiculaire TU au plan AOa. Maintenant si l'on décrit, dans le plan BOC une ellipse ayant ses foyers aux points B et C, et dont le grand axe soit $=$BO$+$OC, et qu'on fasse tourner cette ellipse autour de BC; elle engendrera une ellipsoïde dont la surface ne devra rencontrer notre cercle qu'au seul point O; car si elle le coupait en un autre point S, on aurait $BS+CS=BO+CO$, d'où, à cause de $AS=AO$, on conclurait $AS+BS+CS=AO+BO+CO$, ce qui serait contre l'hypothèse. Donc, d'après la dernière des deux observations faites ci-dessus, la tangente TU au cercle au point O est dans le plan tangent en ce point à la surface de l'ellipsoïde; et, comme cette tangente est perpendiculaire au plan AOa, il en résulte que le plan tangent à l'ellipsoïde est aussi perpendiculaire au plan AOa ; donc réciproquement ce plan lui est perpendiculaire, et par conséquent il passe par la normale à l'ellipsoïde au point O ; mais la normale à l'ellipsoïde de révolution en chacun de ses points se confond avec celle de l'ellipse génératrice, lorsqu'elle passe par ce point ; donc enfin le plan AOa passe par la normale à l'ellipse dont les foyers sont en B et C et dont BO et CO sont deux rayons vecteurs ; donc cette normale n'est autre que la droite OP suivant laquelle le plan AOa rencontre le plan BOC, laquelle doit ainsi diviser en deux parties égales l'angle BOC des rayons vecteurs. Le plan mené perpendiculairement au plan donné, par l'une quelconque des trois droites OA, OB, OC divise donc l'angle des deux autres en deux parties égales ; le plan mené par chacune d'elles perpendiculairement au plan donné divise donc l'angle des deux autres en deux parties égales (*).

(*) M. W. H. T. observe qu'en supposant nulles les trois hauteurs Aa, Bb, Cc, le problème reviendrait à *trouver, sur le plan d'un triangle donné, un point dont la somme des distances à ses trois sommets soit la moindre possible;* problème qui a été traité, ainsi qu'un grand nombre d'autres problèmes analogues, à la page 377 du 1.er volume du présent recueil; mais que la situation des trois points donnés peut ne pas donner de *minimum* proprement dit; circonstance qui doit également se reproduire dans quelques cas particuliers du problème énoncé à la page 380 du XII.e volume du présent recueil.

Nous observerons, à notre tour que, si le théorème qui vient d'être démontré est propre à jeter du jour sur la solution de ce dernier problème, cette solution, toutefois, n'en résulte pas immédiatement et reste encore à trouver.

J. D. G.