ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. L. WOISARD

Analise transcendante. Considérations analitico-géométriques, sur les solutions particulières des équations différentielles du I.er ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 333-342

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__333_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Considérations analitico-géométriques, sur les solutions particulières des équations différentielles du 1.er ordre ;

Par M. J. L. Woisard, répétiteur de mathématiques à l'école d'artillerie de Metz.

On sait que l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre renferme une constante arbitraire ; et que, par conséquent, cette dernière équation peut être considérée comme représentant une infinité de lignes, dont on obtiendrait les équations individuelles, en faisant varier, depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif, le paramètre arbitraire qui entre dans l'intégrale complète.

Mais on trouve aussi quelquefois des polynomes qui, sans être des cas particuliers de l'intégrale complète, ni des facteurs communs à tous les coefficiens de $\frac{dy}{dx}$, dans l'équation différentielle, satisfont néanmoins aux conditions exprimées par cette dernière, quand on les égale à zéro. Nos analistes modernes les ont appelés *Solutions particulières;* ils en ont expliqué l'origine; ils ont donné le moyen de les obtenir, sans résoudre l'équation différentielle proposée, et ont fait voir que les lignes qu'elles représentent sont les enveloppes de celles que représente l'intégrale complète.

J'ai considéré le même problème dans un ordre inverse, c'est-à-dire que j'ai cherché à déduire des propriétés des lignes enveloppes la démonstration de l'existence des solutions particulières, dans certaines équations différentielles, et à les déterminer, sans résoudre les équations dont elles dérivent. Quoiqu'en général il soit peu important d'obtenir, par de nouveaux moyens des résultats déjà connus, j'ai pensé que néanmoins une méthode géométrique pourrait offrir quelque intérêt, parce que souvent elle rend sensibles des raisonnemens difficiles à saisir, et que d'ailleurs elle m'a conduit à plusieurs conséquences importantes qui, je crois, n'ont point encore été signalées.

Pour exposer convenablement la théorie que j'ai en vue, je suis obligé de rappeler succinctement les propriétés déjà connues des lignes enveloppes.

1. Soit $\varphi(x, y, c)=0$ une équation quelconque à deux variables, renfermant un paramètre arbitraire; on peut toujours imaginer une ligne AMB (fig. 1), rapportée à deux axes rectangulaires, telle que, pour une valeur déterminée du paramètre c, les coordonnées de chacun de ses points satisfassent à l'équation $\varphi(x, y, c)=0$. Généralement cette ligne changera de figure et de situation par rapport aux axes, quand on fera varier la valeur du paramètre c; ainsi, elle pourra devenir successivement A$'$M$'$B$'$, A$''$M$''$B$''$,....., lors qu'on remplacera c par c', c'', ... On appelle *enveloppe* des lignes représentées par l'équation $\varphi(x, y, c)=0$, une ligne M M$'$ M$''$.... tangente commune à toutes celles qu'on peut obtenir en faisant varier la valeur de c, depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif; et les lignes AMB, A$'$M$'$B$'$, A$''$M$''$B$''$, ... qu'elle touche, toutes en sont dites les *enveloppées*.

2. Soient AMB, A$'$M$'$B$'$, deux enveloppées consécutives, dont les équations sont respectivement $\varphi(x, y, c)=0$ et $\varphi(x, y, c')=0$; elles diffèrent d'autant moins de forme et de position que la différence $c-c'$ est plus petite; et, si l'on vient à la supposer tout à fait nulle, la branche M$'$A$'$ de la seconde viendra se confondre avec la branche MA de la première; d'où il suit qu'à mesure que c'

sera devenu moins différent de c, le point K d'intersection des deux courbes se sera mu sur la branche MB de la première, de manière à coïncider avec le point M de celle-ci, lorsque c' sera devenu rigoureusement égal à c; donc les points communs à l'enveloppante MM'M''..... et à l'enveloppée AMB sont les points d'intersection de cette dernière ligne avec celle qu'on obtient en faisant varier infiniment peu le paramètre c dans l'équation $\varphi(x,y,c)=0$. Donc pour avoir les coordonnées de cette intersection, c'est-à-dire du point M, il faut résoudre simultanément les deux équations

$$\varphi(x;y,c)=0\,,\quad \varphi(x,y,c)+\frac{\mathrm{d}.\{\varphi(x,y,c)\}}{\mathrm{d}c}\mathrm{d}c=0\ ; \qquad (*)$$

3. On en conclut ordinairement que, la première réduisant la seconde, elles peuvent être remplacées par le système de ces deux-ci :

$$\varphi(x,y,c)=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}.\{\varphi(x,y,c)\}}{\mathrm{d}c}=0\,;$$

mais cette simplification, employée inconsidérément, peut quelquefois faire négliger des racines communes; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si on l'appliquait à l'équation

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-x+c=0\,;$$

qui représente un cercle, d'un rayon constant $=r$, ayant son centre en un point déterminé de l'axe des x. En la différentiant par rapport à c, on trouve $1=0$ d'où l'on serait tenté de conclure que deux

(*) On trouve ce point de doctrine nettement déduit de la série de Taylor, sans considération d'infiniment petits, ou autres équivalentes, à la page 361 du III.e volume du présent recueil.

J. D. G.

cercles consécutifs ne se coupent pas. Mais on reconnaîtra facilement l'erreur de cette conclusion, si l'on considère que $(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ peut être pris avec deux signes; et que, par conséquent, supposer que dc est la différence des deux polynomes

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-y+c\ ,\ (r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-x+c+\mathrm{d}c,$$

c'est chercher seulement les points d'intersection de demi-cercle AMB (Fig. 2) avec le demi-cercle A'M'B', et ceux du demi-cercle ANB avec le demi-cercle A'N'B'; tandis qu'on omet les points K et L d'intersection du demi-cercle ANB avec le demi-cercle A'M'B', lesquels se confondent avec A et B, lorsque la distance CC' des centres devient nulle. Nous en conclurons que la simplification indiquée ci-dessus ne doit être employée que quand l'équation ne renferme aucun terme susceptible de plusieurs valeurs différentes, et que, dans le cas contraire, il faut combiner tour à tour toutes les formes de l'une des équations avec toutes les formes de l'autre. Ainsi, dans l'exemple précédent en considérant $(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ avec le signe $+$, dans la première équation, et avec le signe $-$ dans la seconde, le résultat de la soustraction eût été

$$(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}-\mathrm{d}c=0,$$

ou, à cause de dc infiniment petit

$$r^2-y^2=0,\ \text{d'où}\ y=\pm r\ \text{et}\ x=c.$$

C'est ce qu'on aurait également trouvé, au surplus, en mettant l'équation sous la forme

$$r^2-y^2-(x-c)^2=0.$$

Néanmoins, pour simplifier les raisonnemens, je supposerai que l'équation $\varphi(x,y,c)=0$ n'a aucun terme susceptible de plusieurs valeurs. Dans beaucoup de circonstances, on pourra lui donner cette propriété, en faisant disparaître les radicaux, et, dans tous les cas, au moyen de la remarque précédente, il sera facile de modifier convenablement les principes qui vont être établis.

4. Puisque le système des deux équations

$$\varphi(x,y,c)=0\,,\ \frac{d.\varphi(x,y,c)}{dc}=0$$

détermine ceux des points de l'enveloppée AMB (Fig 1) qui appartiennent à l'enveloppe $MM'M''$....; l'élimination de c, entre ces deux équations, donnera l'équation de l'enveloppe. Cette règle est la conséquence des premières notions de la géométrie analitique. Je vais actuellement examiner quelques résultats auxquels conduit son application; en représentant, pour plus de brièveté, la fonction $\varphi(x,y,c)$ par la simple lettre φ.

Dabord $\frac{d\varphi}{dc}$ sera indépendant de c, toutes les fois que φ sera de la forme $mc+n$, où m et n sont des fonctions de x, y et des constantes autres que c. Alors il n'y aura pas lieu à élimination, et deux enveloppées quelconques seront représentées par les équations

$$mc+n=0\,,\ mc'+n=0.$$

Si m est indépendant de x et de y, ces deux équations seront incompatibles, et les lignes qu'elles représenteront n'auront aucun point commun; ainsi, par exemple, en faisant varier c dans l'équation $y+ax+c=0$, on obtient une suite de droites parallèles. Si, au contraire m contient les variables, ou seulement l'une d'elles, les deux équations ne pourront être satisfaites qu'en posant séparément $m=0$, $n=0$, et par conséquent toutes les enveloppées se coupent en des points déterminés, et en nombre fini. Ainsi, par exemple, en faisant varier c dans l'équation $y^2=cx$, on obtient des paraboles qui passent toutes par l'origine et dont les branches ne se rencontrent pas.

Mais, hors le cas ci-dessus indiqué, $\frac{d\varphi}{dc}$ contiendra encore c, et en l'égalant a zéro, on en tirera, pour ce paramètre des valeurs qu'on substituera dans l'équation $\varphi=o$. Le résultat de la substitution des valeurs de c, fonction de x et y, donnera les enveloppes cherchées. Mais le résultat de la substitution des valeurs constantes donnera des cas particuliers de l'équation $\varphi=o$. Ce seront ceux pour lesquels deux enveloppées consécutives se confondront en une seule; et par conséquent on trouvera, par ce moyen, toutes celles qui servent de limites aux autres (*).

Par exemple, en différentiant par rapport à c l'équation

$$y=(1-c^2)x+c^3,$$

qui représente une droite, on trouve

$$-2cx+3c^2=o;$$

d'où

$$c=o \text{ et } c=\tfrac{2}{3}x.$$

Si l'on substitue $c=o$ dans la proposée, on trouvera $y=x$, équation de la droite BC (Fig.3). C'est, parmi toutes les enveloppées, celle qui fait le plus grand angle aigu avec l'axe des x. Si, au contraire on substitue $c=\frac{2}{3}x$, il viendra

$$y=x-\tfrac{4}{27}x^3;$$

(*) On trouve un exemple de l'introduction de ces enveloppées particulières dans l'équation générale des enveloppes, dans un article de M. Poncelet sur la théorie des polaires réciproques (*Annales*, tom. VIII, pag. 210—226.)

équation de l'enveloppe de toutes les droites BC, B′C′, B″C″, B‴C‴, ...

5. Toute ligne peut être considérée comme l'enveloppe d'une infinité de systèmes d'enveloppées différentes. L'équation générale de celles-ci est arbitraire ; elle doit seulement renfermer un paramètre variable, et représenter une ligne tangente à la première en des points qui varient de situation lorsqu'on fait varier ce paramètre.

6. Supposons présentement que l'on élimine c entre $\varphi=0$ et $\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$; en faisant, pour abréger $\frac{dy}{dx}=p$, le résultat sera une fonction de x, y et p. Représentons-la par $\varphi'=0$, et cherchons quelles sont les lignes dont elle exprime les propriétés.

Une ligne MM′M″.... (Fig.4) peut être regardée comme représentée par l'équation $\varphi'=0$ si, en substituant dans cette équation, à la place de x et y, les coordonnées de l'un quelconque M de ses points, on en tire pour p la valeur du coefficient de x dans l'équation de la tangente MT en ce même point. Or on peut toujours, dans l'équation $\varphi=0$, donner à la constante c une valeur telle que la ligne représentée par cette équation passe par le point M, et la valeur de p, tirée de $b=0$, déterminera la direction de la tangente à cette ligne AMB. Donc la ligne MM′M″..... doit être telle que si, par un quelconque de ses points, on fait passer une des lignes représentées par $\varphi=0$, elle ait avec cette ligne une tangente commune ; donc elle doit être ou l'un des cas particuliers de $\varphi=0$, ou l'une des enveloppes des lignes représentées par cette dernière équation.

7. Il s'agirait actuellement de déterminer l'équation des enveloppes telles que MM′M″......, sans être obligé d'intégrer l'équation $\varphi'=0$. pour cela il suffira (5) de trouver l'équation d'une ligne qui soi tangente à MM′M″....., et dont le point de contact prenne successivement différentes positions, quand on fera varier un paramètre.

8. Les enveloppes cherchées peuvent être courbes ou droites ; je considérerai d'abord les premières.

Soit MT (fig. 4) une tangente à l'enveloppante courbe MM′M″.... ; si je mène à toutes les enveloppées des tangentes Q′T′, Q″T″,......, parallèles à cette première droite, la suite des points de contact Q, Q′, Q″,..... déterminera une courbe QQ′Q″..... qui passera par le point M. Je dis de plus qu'en ce point elle sera tangente à MM′M″..... En effet, la position d'une tangente se détermine en prenant la limite de la position d'une corde dont l'une des extrémités s'approche indéfiniment de l'autre, considérée comme fixe. Or, si l'on considère la corde MQ′, il est évident que l'extrémité Q′ s'approchera indéfiniment du point M′, quand ce dernier s'approchera du point M, et qu'ils se confondront à la limite, puisqu'alors M′T′ sera parallèle à MT ; donc la limite de la corde MQ′ est la même que celle de la corde MM′; mais cette dernière étant corde de la courbe MM′M″..... a pour limite la tangente MT ; donc cette dernière droite est aussi tangente à la courbe transversale QQ′Q″.

Nous pouvons conclure de là que les enveloppes cherchées se trouveront parmi les enveloppes des transversales QQ′Q″ ...., dont il faut présentement chercher l'équation générale.

Si l'équation $\varphi=0$ était donnée, en y mettant pour c la valeur qui convient à l'enveloppée A′M′B′, on trouverait les coordonnées du point Q′ en résolvant simultanément les équations

$$\varphi=0\,, \quad \frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}p=0\,,$$

après avoir mis pour p, dans la dernière, la tangente tabulaire de l'angle que fait la droite Q′T′ avec l'axe des x ; et, pour obtenir l'équation de la transversale QQ′Q″...., il faudrait éliminer c entre les deux mêmes équations ; mais (6) le résultat de cette élimination serait $\varphi'=0$; donc cette dernière équation, en y considérant p comme une constante arbitraire, représentera les transversales cherchées.

9. Je suppose présentement que l'enveloppe $MM'M''\ldots$, soit une droite (fig. 5) faisant avec l'axe des x un angle α. La transversale représentée par l'équation $\varphi'=0$ se confondra avec cette droite, lorsqu'on y fera $p=\text{Tang.}\,\alpha$; de plus, MM' étant la limite des enveloppées sera aussi la limite des transversales. Donc les droites enveloppes des lignes représentées par $\varphi=0$ seront des cas particuliers de celles que représente l'équation $\varphi'=0$, et se trouveront parmi celles de ces lignes qui servent de limites aux autres, et par conséquent la valeur de p qui leur correspond satisfera à la condition $\frac{d\varphi}{dp}=0$.

Mais il est en général très-difficile de trouver les valeurs infinies qui satisfont à une équation, parce qu'elles proviennent de la disparition des termes qui représentent les plus hautes puissances de l'inconnue; et par conséquent, pour avoir les valeurs qui correspondent à des parallèles aux y, il faudra faire $p=\frac{1}{q}$, dans l'équation $\varphi'=0$, et si $\psi'=0$, représente le résultat de cette substitution, on cherchera les valeurs nulles que l'on peut tirer de $\frac{d\psi}{dq}=0$.

10. Nous pouvons donc conclure qu'à l'exception des fonctions de x seul, toutes les solutions particulières de l'équation $\varphi'=0$ s'obtiendront en éliminant p entre

$$\varphi'=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi'}{dp}=0\ ;$$

mais, comme les transversales dont il a été question dans les n.os précédens peuvent avoir des enveloppes et des limites autres que les enveloppes des lignes représentees par l'équation $\varphi=0$, on peut, en suivant cette méthode, trouver des facteurs étrangers à la question. La géométrie semble n'offrir pour les reconnaître aucun moyen autre que la vérification à *posteriori;* mais voici quelques théorèmes que l'analyse n'avait pas, à ce que je crois, fait encore découvrir, et qui sont la conséquence immédiate des remarques faites ci-dessus (4, 8, 9,).

1.° Lorsque la différentielle $\frac{d\phi}{dp}$ est indépendante de x et de y, les solutions particulières de l'équation différentielle $\varphi'=0$ ne peuvent représenter que des droites, et sont conséquemment décomposables en facteurs de la forme $y-mx-n=0$.

2.° En ce cas, si p, p', p'', ... sont les valeurs de p tirées de l'équation $\frac{d\phi'}{dp}=0$, les solutions particulières correspondantes seront

$$y-px-n=0\,,\quad y-p'x-n'=0\,,\quad y-p''x-n''=0\,,\ \ldots\ldots$$

et la question sera réduite à trouver les valeurs de n, n', n'', ...

3.° Lorsque l'équation $\varphi'=0$ a des solutions particulières, fonctions de y seul, l'équation $\frac{d\varphi'}{dp}=0$ est satisfaite par $p=0$; et, si l'on substitue cette valeur dans le polynome φ', les solutions cherchées seront les facteurs de la forme $y-k$.

4.° Pour trouver les solutions particulières fonctions de x seul, on indique ordinairement la règle suivante : « Remplacez, dans l'équation $\varphi'=0$, p par $\frac{1}{q}$; et si $\psi'=0$ représente le résultat de cette » substitution, éliminez q entre $\psi'=0$; et $\frac{d\psi'}{dq}=0$; vous trouverez » alors toutes les solutions fonctions de x seul, et en outre les » solutions fonctions de x et y déjà obtenues par la première méthode ». Les principes établis ci-dessus fournissent le moyen d'abréger ce calcul; il est évident, en effet, que toutes les fois que $\varphi'=0$ a des solutions particulières, fonctions de x seul, l'équation $\frac{d\psi'}{dq}=0$ est satisfaite par $q=0$, et qu'on les obtiendra toutes en substituant zéro au lieu de q dans le polynome ψ', et cherchant ensuite ses diviseurs de la forme $x-k$.