ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Géométrie transcendante. Recherches analitiques, sur une classe de problèmes de géométrie dépendant de la théorie des maxima et minima

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 108-116
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__108_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherches analitiques, sur une classe de problèmes de géométrie dépendant de la théorie des maxima *et* minima;

Par M. Ch. Sturm.

Soient p, p', p'',..... les distances d'un point cherché M à des points fixes, donnés dans l'espace; soient q, q', q'', ... les distances du même point à d'autres points qui doivent être trouvés sur autant de courbes fixes données, planes ou à double courbure; soient enfin r, r', r'', ... les distances de ce point à des points qui sont assujettis à se trouver sur autant de surfaces données; et l'équation

$$u=\mathrm{F}(p\,,p'\,,p''\,,.....q\,,q'\,,q''\,,.....r\,,r'\,,r''\,,.....)\ ,$$

dans laquelle F désigne une fonction connue quelconque, étant donnée, proposons-nous d'assigner les conditions nécessaires pour que la fonction u soit *maximum* ou *minimum*.

Rapportons l'espace à trois plans rectangulaires quelconques. Soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ... respectivement, les coordonnées des points d'où partent les droites p, p', p'',..... pour se diriger vers M; soient d, e, f, d', e', f', d'', e'', f'', ... respectivement les coordonnées des points d'où partent les droites q, q', q'', ... pour se diriger vers ce point; et soient enfin g,

h, k, g', h', k', g'', h'', k'', ... respectivement, les points d'où partent les droites r, r', r'', ..., pour se diriger vers le même point.

Convenons encore de désigner par (p, x), (p, y), (p, z), (p', x), (p', y), (p', z), ... les angles que font les droites p, p', ... avec les trois axes ; par (q, x), (q, y), (q, z), (q', x), (q', y), (q', z), ... les angles que font les droites q, q', ... avec ces axes; et enfin par (r, x), (r, y), (r, z), (r', x), (r', y), (r', z), ... les angles que font les droites r, r', ... avec les mêmes axes ; et soient x, y, z, les coordonnées du point M.

La condition commune au *maximum* et au *minimum* de la fonction u, est, comme l'on sait, que sa différentielle totale du premier ordre soit égale à zéro. Il est connu d'ailleurs que cette condition, toujours nécessaire pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, ne suffit pas néanmoins, dans tous les cas, pour en assurer l'existence.

En posant donc, pour abréger,

$$\left(\frac{du}{dp}\right)=P\,, \quad \left(\frac{du}{dp'}\right)=P'\,, \quad \left(\frac{du}{dp''}\right)=P''\,, \ldots.$$

$$\left(\frac{du}{dq}\right)=Q\,, \quad \left(\frac{du}{dq'}\right)=Q'\,, \quad \left(\frac{du}{dq''}\right)=Q''\,, \ldots.$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)=R\,, \quad \left(\frac{du}{dr'}\right)=R'\,, \quad \left(\frac{du}{dr''}\right)=R''\,, \ldots.$$

l'équation commune au *maximum* et au *minimum* sera

$$Pdp+P'dp'+P''dp''+\ldots\ldots.+Qdq+Q'dq'+Q''dq''+\ldots\ldots.$$
$$+Rdr+R'dr'+R''dr''+\ldots\ldots=0\,.$$

Or, nous avons

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\ ,$$

$$q=\sqrt{(x-d)^2+(y-e)^2+(z-f)^2}\ ,$$

$$r=\sqrt{(x-g)^2+(y-h)^2+(z-k)^2}\ ,$$

d'où

$$\mathrm{d}p=\frac{x-a}{p}\mathrm{d}x+\frac{y-b}{p}\mathrm{d}y+\frac{z-c}{p}\mathrm{d}z\ ,$$

$$\mathrm{d}q=\frac{x-d}{q}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}d)+\frac{y-e}{q}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}e)+\frac{z-f}{q}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}f)\ ,$$

$$\mathrm{d}r=\frac{x-g}{r}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}g)+\frac{y-h}{r}(\mathrm{d}y-\mathrm{d}h)+\frac{z-k}{r}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}k)\ ,$$

mais on a

$$\frac{x-a}{p}=\mathrm{Cos.}(p\,,x)\ ,\quad \frac{y-b}{p}=\mathrm{Cos.}(p\,,y)\ ,\quad \frac{z-c}{p}=\mathrm{Cos.}(p\,,z)\ ,$$

$$\frac{x-d}{q}=\mathrm{Cos.}(q\,,x)\ ,\quad \frac{y-e}{q}=\mathrm{Cos.}(q\,,y)\ ,\quad \frac{z-f}{q}=\mathrm{Cos.}(q\,,z)\ ,$$

$$\frac{x-g}{r}=\mathrm{Cos.}(r\,,x)\ ,\quad \frac{y-h}{r}=\mathrm{Cos.}(r\,,y)\ ,\quad \frac{z-k}{r}=\mathrm{Cos.}(r\,,z)\ ;$$

donc

$$\mathrm{d}p=\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}(p\,,x)+\mathrm{d}y\mathrm{Cos.}(p\,,y)+\mathrm{d}z\mathrm{Cos.}(p\,,z)\ , \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}q=(\mathrm{d}x-\mathrm{d}d)\mathrm{Cos.}(q\,,x)+(\mathrm{d}y-\mathrm{d}e)\mathrm{Cos.}(q\,,y)+(\mathrm{d}z-\mathrm{d}f)\mathrm{Cos.}(q\,,z)\ ,$$

$$\mathrm{d}r=(\mathrm{d}x-\mathrm{d}g)\mathrm{Cos.}(r\,,x)+(\mathrm{d}y-\mathrm{d}h)\mathrm{Cos.}(r\,,y)+(\mathrm{d}z-\mathrm{d}k)\mathrm{Cos.}(r\,,z)\ ;$$

et l'on aura des valeurs analogues pour dp', dq', dr', dp'', dq'', dr'',.....

Soient désignées par t la tangente au point (d, e, f) à la courbe sur laquelle ce point doit se trouver, et par s l'arc de cette courbe, on aura

$$\mathrm{d}d = \mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t, x), \quad \mathrm{d}e = \mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t, y), \quad \mathrm{d}f = \mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t, z);$$

substituant ces valeurs dans celle de $\mathrm{d}q$, en observant que

$$\mathrm{Cos.}(t,x)\mathrm{Cos.}(q,x) + \mathrm{Cos.}(t,y)\mathrm{Cos.}(q,y) + \mathrm{Cos.}(t,z)\mathrm{Cos.}(q,z) = \mathrm{Cos.}(t,q)$$

elle deviendra

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}x\,\mathrm{Cos.}(q,x) + \mathrm{d}y\,\mathrm{Cos.}(q,y) + \mathrm{d}z\,\mathrm{Cos.}(q, z) + \mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}(t, q) \qquad (2)$$

Soit ensuite désignée par n la normale au point (g, h, k) à la surface sur laquelle ce point doit se trouver; l'équation différentielle de cette surface pourra, comme l'on sait, être mise sous la forme

$$\mathrm{d}g\,\mathrm{Cos.}(n, x) + \mathrm{d}h\,\mathrm{Cos.}(n, y) + \mathrm{d}k\,\mathrm{Cos.}(n, z) = 0,$$

d'où

$$-\mathrm{d}k = \frac{\mathrm{Cos.}(n, x)}{\mathrm{Cos.}(n, z)}\,\mathrm{d}g + \frac{\mathrm{Cos.}(n, y)}{\mathrm{Cos.}(n, z)}\,\mathrm{d}h,$$

valeur qui, substituée dans celle de $\mathrm{d}r$, donnera

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}r = {} & \mathrm{d}x\,\mathrm{Cos.}(r, x) + \mathrm{d}y\,\mathrm{Cos.}(r, y) + \mathrm{d}z\,\mathrm{Cos.}(r, z) \\ & + \left\{\frac{\mathrm{Cos.}(r, z)\mathrm{Cos.}(n, x)}{\mathrm{Cos.}(n, z)} - \mathrm{Cos.}(r, x)\right\}\mathrm{d}g \\ & + \left\{\frac{\mathrm{Cos.}(r, z)\mathrm{Cos.}(n, y)}{\mathrm{Cos.}(n, z)} - \mathrm{Cos.}(r, y)\right\}\mathrm{d}h;\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et les valeurs de $\mathrm{d}q'$, $\mathrm{d}r'$, $\mathrm{d}q''$, $\mathrm{d}r''$, ... seront susceptibles de transformations analogues.

En substituant donc ces diverses valeurs dans l'équation

$$Pdp+P'dp'+\ldots\ldots+Qdq+Q'dq'+\ldots\ldots+Rdr+R'dr'+\ldots\ldots=0\,,$$

que nous avons vu ci-dessus exprimer la condition commune au *maximum* et au *minimum*, elle deviendra, en employant le signe Σ, par forme d'abréviation,

$$\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,x)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,x)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,x)]\}dx$$

$$+\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,y)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,y)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,y)]\}dy$$

$$+\{\Sigma[P\text{Cos.}(p,z)]+\Sigma[Q\text{Cos.}(q,z)]+\Sigma[R\text{Cos.}(r,z)]\}dz$$

$$-\Sigma\{Qds\text{Cos.}(t,q)\}$$

$$+\Sigma\left\{R\left[\frac{\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(n,x)}{\text{Cos.}(n,z)}-\text{Cos.}(r,x)\right]dg\right\}$$

$$+\Sigma\left\{R\left[\frac{\text{Cos}(r,z)\text{Cos}(n,y)}{\text{Cos}(n,z)}-\text{Cos.}(r,y)\right]dh\right\}=0\,. \qquad \text{(I)}$$

Or, présentement que les différentielles ds, dg, dh, ds', dg', dh',..... sont tout-à-fait indépendantes, il faudra, dans l'équation (I), égaler leurs coefficiens à zéro; et comme d'ailleurs aucune des fonctions Q, R, Q', R',..... ne doit être nulle, cela donnera d'abord

$$\text{Cos.}(t,q)=0\,,\quad \text{Cos.}(t',q')=0\,,\quad \text{Cos.}(t'',q'')=0\,,$$

ce qui nous apprend, en premier lieu, que les droites q, q', q'',.... doivent être respectivement perpendiculaires aux tangentes t, t', t'',.... et par conséquent normales aux courbes auxquelles elles se terminent.

On aura ensuite

Cos.

$$\frac{\mathrm{Cos.}(r\,,\,x)}{\mathrm{Cos.}(n\,,\,x)}=\frac{\mathrm{Cos.}(r\,,\,y)}{\mathrm{Cos.}(n\,,y)}=\frac{\mathrm{Cos.}(r\,,z)}{\mathrm{Cos.}(n\,,\,z)}\,,$$

et les autres équations analogues, d'où

$$\mathrm{Cos.}(r\,,\,x)=\mathrm{Cos.}(n\,,\,x)\,,\qquad \mathrm{Cos.}(r'\,,\,x)=\mathrm{Cos.}(n'\,,\,x)\,,\ldots.$$

$$\mathrm{Cos.}(r\,,\,y)=\mathrm{Cos.}(n\,,y)\,,\qquad \mathrm{Cos.}(r'\,,\,y)=\mathrm{Cos.}(n'\,,y)\,,\ldots.$$

$$\mathrm{Cos.}(r\,,\,z)=\mathrm{Cos.}(n\,,\,z)\,,\qquad \mathrm{Cos.}(r'\,,\,z)=\mathrm{Cos.}(n'\,,\,z)\,,\ldots.$$

ce qui montre que les droites r, r', r'',..... doivent aussi être respectivement normales aux surfaces auxquelles elles se terminent.

Concevons présentement qne le point M soit sollicité par des forces proportionnelles à P, Q, R, P', Q', R', ...,.., et dirigé suivant les droites p, q, r, p', q', r', ... respectivement.

Soit V la résultante de toutes ces forces, et soient α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes. Les quantités qui multiplient dx, dy, dz, dans l'équation (I) reviennent visiblement à VCos.α, VCos.β, VCos.γ; de sorte que cette équation, de laquelle nous avons déjà fait disparaître les derniers termes, se réduit à

$$V(\mathrm{d}x\mathrm{Cos.}\alpha+\mathrm{d}y\mathrm{Cos.}\beta+\mathrm{d}z\mathrm{Cos.}\gamma)=0\,. \qquad \text{(II)}$$

Celle-ci sera toujours satisfaite, lorsqu'on aura $V=0$, c'est-à-dire, lorsque les forces proportionnelles à P, Q, R, P', Q', R', ... se feront équilibre, à quelque conditions que le point M puisse être d'ailleurs assujetti.

Si ce point est parfaitement libre dans l'espace, les différentielles dx, dy, dz seront indépendantes, et il faudra encore que $V=0$; parce que Cos.α, Cos.β, Cos.γ ne sauraient être nuls à la fois.

Si le point M doit être pris sur une surface donnée ; en représentant par δ, ε, ζ les angles que fait avec les axes la normale à cette surface en ce point, son équation différentielle sera

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{Cos.}\delta+\mathrm{d}y\,\mathrm{Cos.}\varepsilon+\mathrm{d}z\,\mathrm{Cos.}\zeta=0\ ;$$

en tirant de cette équation la valeur de dz, pour la substituer dans l'équation (II), celle-ci deviendra, en divisant par V,

$$\left(\mathrm{Cos.}\alpha-\frac{\mathrm{Cos.}\delta\,\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{Cos.}\beta-\frac{\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\right)\mathrm{d}y=0\ ;$$

d'où, à cause de l'indépendance de dx et dy,

$$\frac{\mathrm{Cos.}\alpha}{\mathrm{Cos.}\delta}=\frac{\mathrm{Cos.}\beta}{\mathrm{Cos.}\varepsilon}=\frac{\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Cos.}\zeta}\ ;$$

ou bien

$$\mathrm{Cos.}\alpha=\mathrm{Cos.}\delta\ ,\quad \mathrm{Cos.}\zeta=\mathrm{Cos.}\varepsilon\ ,\quad \mathrm{Cos.}\gamma=\mathrm{Cos.}\zeta\ ,$$

c'est-à-dire que la résultante des forces qui sollicitent le point M doit, lorsqu'elle n'est pas nulle, être normale à la surface sur laquelle ce point doit être situé ; de sorte qu'on peut la regarder comme détruite par la résistance de cette surface.

Si le point M doit être pris sur une ligne donnée, droite ou courbe, plane ou à double courbure ; en représentant par ds l'élément de cette ligne, au point dont il s'agit et par δ, ε, ζ les angles que fait cet élément avec les axes, on aura

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}\delta\ ,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\ ,\quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}s\,\mathrm{Cos.}\zeta\ ;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (II), elle deviendra, en divisant par Vds,

$$\mathrm{Cos.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\delta+\mathrm{Cos.}\beta\,\mathrm{Cos.}\varepsilon+\mathrm{Cos.}\gamma\,\mathrm{Cos.}\zeta=0\ ;$$

d'où l'on voit que, dans ce cas, si la résultante V n'est pas nulle, sa direction devra être normale à la ligne sur laquelle le point M doit être situé; de sorte qu'elle sera en équilibre sur cette ligne, considérée comme obstacle à l'action qu'elle tend à produire.

On peut donc, en résumé, établir le théorème général que voici :

Soient p, p′, p″,.... *les distances d'un point* M *à des points fixes dans l'espace. Soient* q, q′, q″,..... *les distances du même point à des points mobiles sur des lignes fixes. Soient enfin* r, r′, r″,..... *les distances de ce point à des points mobiles sur des surfaces fixes.*

Supposons que ce point M *soit tellement choisi dans l'espace qu'une fonction déterminée* u *des distances* p, p′, p″,.... q, q′, q″,.... r, r′, r″,.... *soit un* maximum *ou un* minimum; *et concevons ce même point sollicité, suivant les directions de ces distances, par des forces proportionnelles aux valeurs actuelles des dérivées partielles de* u, *prises par rapport à ces mêmes distances; alors,*

1.° *Les droites* q, q′, q″,.... r, r′, r″,.... *seront respectivement normales aux lignes et surfaces auxquelles elles se termineront.*

2.° *Si le point* M *est parfaitement libre dans l'espace, il devra se trouver en équilibre sous l'action des forces que nous avons supposé le solliciter; et s'il est assujetti à se trouver sur une surface ou sur une ligne donnée, la résultante de ces mêmes forces, lorsqu'elle ne sera pas nulle, devra être normale à cette surface ou à cette ligne; de sorte qu'on pourra dire, dans tous les cas, que le point* M *est en équilibre.*

L'inverse de ce théorème n'est pas généralement vrai, c'est-à-dire que toutes ces diverses conditions peuvent fort bien être remplies, sans que, pour cela, il y ait nécessairement maximum *ou* minimum.

Dans le cas particulier où la fonction u sera simplement la somme des distances p, p', p'', ..., q, q', q'', ..., r, r', r'', ..., ou la somme des produits respectifs de ces mêmes distances par des multiplicateurs a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., les forces sollicitant le point M devront être égales entre elles ou proportionnelles à ces multiplicateurs (*).

(*) A cette théorie générale se rattachent un grand nombre de problèmes traités dans le présent recueil, notamment tom. I, pag. 285, 297, 373 et 375.

J. D. G.