STEIN

Questions résolues. Solutions du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 360 du XIII.e volume des Annales; première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 116-123
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__116_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 360 *du XIII.e volume des* Annales ;

PROBLÈME. *Déterminer la surface convexe et le volume de l'onglet conique détaché d'un cône droit, du côté de sa base, par un plan passant par le centre de cette base ?*

Première solution ;

Par M. Stein, ancien élève de l'école polytechnique, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves.

Soient S (fig. 10) le sommet du cône, C le centre de sa base, DE le diamètre suivant lequel le plan coupant rencontre cette base, AB un diamètre perpendiculaire à celui-là, et CG la droite suivant laquelle le plan du triangle ASB rencontre le plan coupant ; le triangle GCA divisera en deux parties parfaitement symétriques tant la surface que le volume demandés ; de sorte qu'il nous suffira d'obtenir la surface et le volume de l'une des parties et de les doubler, pour résoudre la question proposée.

Les données du problème sont la hauteur du cône que nous désignerons par k, son angle générateur que nous représenterons par α, et enfin l'angle ACG que fait le plan coupant avec l'axe ; angle que nous appellerons β. En conséquence le rayon de la base du cône sera $k\text{Tang.}\alpha$.

Soit décomposée la surface cherchée en élémens infiniment petits, par des droites partant du sommet du cône ; soient N, N' les points où deux droites consécutives rencontrent la circonférence de sa base et M, M' ceux où les deux mêmes droites rencontrent le contour DGE de la section ; le quadrilatère NMM'N' sera la différentielle de la surface DMN ; de sorte qu'il ne s'agira que d'en intégrer l'expression depuis *Ang.*DCN=0 jusqu'à *Ang.*DCN=90° pour obtenir la moitié de la surface cherchée. En outre, si sur SN on abaisse la perpendiculaire CP, le produit de la surface NMM'N' par le tiers de cette perpendiculaire sera l'élément différentiel du volume de la pyramide conique ayant pour base le triangle DMN et son sommet en C ; de sorte qu'en intégrant encore l'expression de cet élément, entre Ang.DCN=0 et Ang.DCN=90°, on aura la moitié du volume du corps cherché.

Soient

$$\text{Ang.DCN}=x\,,\qquad \text{Ang.MCN}=y\,,\qquad \text{MN}=z\ ;$$

l'angle trièdre dont les arêtes sont CD, CM, CN, rectangle suivant la dernière, donnera, par les principes connus,

$$\text{Tang.}y=\text{Cot.}\beta\text{Sin.}x\ ;$$

mais le triangle rectiligne MCN donne

$$z=k.\frac{\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}y}{\text{Cos.}(\alpha-y)}=k.\frac{\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}y}{\text{Cos.}\alpha+\text{Sin.}\alpha\text{Tang.}y}\ ;$$

on aura donc, en substituant pour Tang.y sa valeur,

$$z=k.\frac{\text{Tang}\,\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}{\text{Cos}.\alpha+\text{Sin}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}=\frac{k}{\text{Cos}.\beta}.\frac{\text{Tang}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}{1+\text{Tang}.\alpha\text{Cot}.\beta\text{Sin}.x}.$$

posant donc, pour abréger,

$$\frac{k}{\text{Cos}.\,\beta}=a, \qquad \text{Cot}.\alpha\text{Tang}.\beta=n,$$

nous aurons

$$z=a\,\frac{\text{Sin}.x}{n+\text{Sin}.x}.$$

Si, par le point M, nous concevons un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan déterminera une section circulaire dont l'arc intercepté entre SN et SN' sera MH, semblable à NN'; et dans l'évaluation de la surface NMM'N', nous pourrons faire abstraction du triangle MHM', infiniment petit par rapport à elle; cette surface deviendra ainsi un trapèze; et, en représentant par S la surface DNM, nous aurons

$$\text{d}S=\text{MN}.\frac{\text{NN'}+\text{MH}}{2};$$

or, nous avons

$$\text{MH}=\text{NN'}.\frac{\text{SM}}{\text{SN}}=\text{NN'}.\frac{\text{SN}-\text{MN}}{\text{SN}}=\text{NN'}.\left(1-\frac{\text{MN}}{\text{SN}}\right);$$

donc

$$\text{NN'}+\text{MH}=\text{NN'}\left(2-\frac{\text{MN}}{\text{SN}}\right),$$

ce qui donne

$$\text{d}S=\text{MN}.\text{NN'}\left(1-\frac{\text{MN}}{2\text{SN}}\right);$$

or, nous avons

$$\mathrm{MN}=z\ ,\quad \mathrm{SN}=\frac{k}{\mathrm{Cos.}\alpha}=a\ ,\quad \mathrm{NN}'=k\mathrm{d}x\mathrm{Tang.}\alpha=a\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}\alpha\ ;$$

donc

$$\mathrm{d}S=az\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}\alpha\left(1-\frac{z}{2a}\right)=\frac{z\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}\alpha}{2}\left[a+(a-z)\right]$$

en mettant donc ici pour z sa valeur en x, on aura

$$\mathrm{d}s=\frac{a^2\mathrm{Sin.}\alpha}{2}\left\{\frac{\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{n+\mathrm{Sin.}x}+\frac{n\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{(n+\mathrm{Sin.}x)^2}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Le triangle rectangle SCN donne

$$\mathrm{CP}=\frac{\mathrm{SC.CN}}{\mathrm{SN}}=k\mathrm{Sin.}\alpha=a\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha,$$

mais, en représentant par V le volume de la pyramide qui a la surface S pour base et son sommet en C, on a

$$\mathrm{d}V=\tfrac{1}{3}\mathrm{CP.dS}\ ;$$

donc, en substituant, on aura

$$\mathrm{d}V=\frac{a^3\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}\alpha}{6}\left\{\frac{\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{n+\mathrm{Sin.}x}+\frac{n\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{(n+\mathrm{Sin.}x)^2}\right\}; \qquad \text{(II)}$$

tout se réduit donc à intégrer les deux formules

$$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{n+\mathrm{Sin.}x}\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{(n+\mathrm{Sin.}x)^2}.$$

Or, il suffit pour cela de savoir intégrer la première ; car en différentiant sous le signe, par rapport à n, l'intégrale

$$\int\frac{\mathrm{d}x\mathrm{Sin.}x}{n+\mathrm{Sin.}x},$$

il vient

$$-\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{(n+\mathrm{Sin}.x)^2}\;;$$

d'où l'on voit qu'en posant

$$\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{n+\mathrm{Sin}.x}=\mathrm{f}(n)\,,$$

on aura

$$\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{(n+\mathrm{Sin}.x)^2}=-\frac{\mathrm{d\,f}(n)}{\mathrm{d}n}\,,$$

et par suite

$$\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{n+\mathrm{Sin}.x}+n\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{(n+\mathrm{Sin}.x)^2}=\mathrm{f}(n)-n.\frac{\mathrm{d.f}(n)}{\mathrm{d}n}=-n^2.\frac{\mathrm{d.}\left[\frac{\mathrm{f}(n)}{n}\right]}{\mathrm{d}n}.\ (*)$$

valeur qu'il ne s'agira plus que de substituer dans les formules (I) et (II).

Pour intégrer donc la formule

$$\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{Sin}.x}{n+\mathrm{Sin}.x}\,,$$

nous poserons d'abord

$$\mathrm{Sin}.x=y\,,\quad \text{d'où}\quad \mathrm{d}x\,\mathrm{Cos}.x=\mathrm{d}y\quad\text{et}\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\;;$$

elle deviendra ainsi

(*) On peut remarquer qu'en général

$$\frac{\mathrm{d}^m.\left\{\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{f}(x)}{n+\varphi(x)}\right\}}{\mathrm{d}n}=\pm1.2.3\ldots.m\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{f}(x)}{[n+\varphi(x)]^{m+1}}\;;$$

$\mathrm{f}(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions indépendantes de n et le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris suivant que m est un nombre pair ou un nombre impair.

$y\mathrm{d}y$

$$\frac{y\,dy}{(y+n)\sqrt{1-y^2}},$$

qu'il faudra intégrer entre $y=0$ et $y=1$.

Nous poserons ensuite

$$\sqrt{1-y^2}=t(1-y),$$

d'où

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dy=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{1-y^2}=\frac{2t}{t^2+1};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{2(t^2-1)dt}{(t^2+1)[(n+1)t^2+(n-1)]};$$

différentielle qui se rapporte aux fractions rationnelles, et dont il faudra prendre l'intégrale entre $t=1$ et $t=\infty$.

Mais pour poursuivre l'intégration sans tomber dans les imaginaires ou dans l'indétermination, il est nécessaire de distinguer les trois cas de $n>1$, $n<1$, $n=1$; on obtiendra alors les intégrales définies que voici :

$$\text{Pour } n>1, \ldots\ldots \frac{\varpi}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\,\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right),$$

$$\text{Pour } n<1, \ldots\ldots \frac{\varpi}{2}+\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\,\text{Log.}\,\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n},$$

$$\text{Pour } n=1, \ldots\ldots \frac{\varpi}{2}-1.$$

En achevant le calcul, comme il a été dit ci-dessus, et ayant toujours égard aux limites des intégrales, on trouvera finalement, en doublant le résultat, Pour $n>1$ (*Section elliptique*),

$$S=a^2\text{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{n}{n^2-1}\left[1-\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right)\right]\right\},$$

$$V=\frac{a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{n}{n^2-1}\left[1-\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\text{Arc}\left(\text{Cos.}=\frac{1}{n}\right)\right]\right\};$$

Pour $n<1$ (*Section hyperbolique*),

$$S=a^2\text{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{n}{1-n^2}\left[1+\frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}}\text{Log.}\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]\right\},$$

$$V=\frac{a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{n}{1-n^2}\left[1+\frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}}\text{Log.}\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]\right\},$$

Enfin, pour $n=1$ (*Section parabolique*),

$$S=a^2\text{Sin}.\alpha\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right\},$$

$$V=\frac{a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}\alpha}{3}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right\},$$

A la vérité, les deux dernières formules ne sauraient, à cause de la disparition de n, s'obtenir par le procédé général que nous avons indiqué; mais lorsque $n=1$, l'intégration est de première facilité.

Si l'on remarque que a est l'arête ou côté du cône, et que conséquemment on a pour sa demi-surface convexe et son demi-volume $\frac{\pi a^2\text{Sin.}\alpha}{2}$ et $\frac{\pi a^3\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos}\,\alpha}{6}$, on verra que la partie de ces intégrales indépendante de ϖ exprime SDGES et le volume compris entre cette surface et les deux plans DGE et DSE.

Les quatre premières formules se simplifient assez et deviennent plus commodes pour le calcul par logarithme, en y introduisant un angle auxiliaire; soit posé,

Pour les deux premières $n = \frac{1}{\text{Cos.}\theta}$,

Et pour les deux autres $p = \text{Sin.}\theta$

elles deviendront alors, savoir, les deux premières,

$$3V = aS\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha = a^3\text{Sin.}^3\alpha\text{Cos.}\alpha \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\theta - \text{Sin.}\theta\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}^3\theta} \right\},$$

et les deux autres

$$3V = aS\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha = a^3\text{Sin.}^3\alpha\text{Cos.}\alpha \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\text{Tang.}\theta}{\text{Cos.}\theta} - \text{Tang.}^3\theta\text{Log.Tang.}\frac{\theta}{2} \right\}$$

Il est presque inutile de dire que dans les premières, l'arc θ devra être réduit en parties du rayon.