ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

F. SARRUS

Analise transcendante. Recherches sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 197-205

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__197_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles ;

Par M. F. Sarrus, docteur ès sciences.

La recherche des conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles, recherche qui a principalement occupé Euler et Condorcet, constitue une des branches les plus importantes de la haute analise. La méthode des variations conduit très-simplement à ces conditions ; mais, outre que l'emploi de cette méthode, dans des recherches de calcul intégral proprement dit, peut sembler indirecte, elle n'offre aucune ressource pour remonter de la différentielle à son intégrale, lorsque les conditions d'intégrabilité se trouvent remplies.

Euler et Condorcet ont bien prouvé, par leur analise, que les conditions qu'ils avaient obtenues sont *nécessaires* ; mais Lexell paraît être le premier qui ait tenté de démontrer (*), sans rien emprunter d'étranger au calcul intégral, que ces conditions sont aussi *suffisantes* ; c'est-à-dire qu'elles entraînent d'elles-mêmes la possibilité d'intégrer ; ce qui est le point important dans cette théorie. Malheureusement, comme l'observe Lagrange (*Leçons sur les fonctions*, leçon XXI), la démonstration de Lexell *est si compliquée, qu'il est difficile de juger de sa justesse et de sa généralité.*

(*) Voyez le tome XV des *Novi Commentarii* de Pétersbourg.

En réfléchissant sur ce sujet, il nous a paru que les procédés du calcul différentiel, proprement dit, pouvaient, à eux seuls, conduire d'une manière assez simple aux conditions d'intégrabilité et à la démonstration de l'importante proposition de Lexell ; et c'est à le faire voir que nous destinons ce petit essai.

Dans tout ce qui va suivre, x et y seront des fonctions quelconques d'une troisième variable dont nous prenons la différentielle pour unité, et de tant de constantes qu'on voudra. Nous représenterons respectivement, pour abréger,

$$dx\,,\quad d^2x\,,\quad d^3x\,,\ldots\ldots\quad \text{par}\quad x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\ldots\ldots$$

$$dy\,,\quad d^2y\,,\quad d^3y\,,\ldots\ldots\quad \text{par}\quad y_1\,,\quad y_2\,,\quad y_3\,,\ldots\ldots$$

P_1, P_2, P_3, ..., seront des fonctions quelconques de

$$x\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ldots\ldots x_{m-1}\,,$$

$$y\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ldots\ldots y_{n-1}\,,$$

dont les différentielles seront respectivement p, p_1, p_2, ...

Cela posé, on a identiquement

$$p=\frac{dP}{dx}x_1+\frac{dP}{dx_1}x_2+\frac{dP}{dx_2}x_3+\ldots\ldots+\frac{dP}{dx_{m-1}}$$

$$+\frac{dP}{dy}y_1+\frac{dP}{dy_1}y_2+\frac{dP}{dy_2}y_3+\ldots\ldots+\frac{dP}{dy_{n-1}}y_n\,,$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= d\frac{dP}{dx}, \\
\frac{dp}{dx_1} &= d\frac{dP}{dx_1} + \frac{dP}{dx}, \\
\frac{dp}{dx_2} &= d\frac{dP}{dx_2} + \frac{dP}{dx_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dp}{dx_{m-1}} &= d\frac{dP}{dx_{m-1}} + \frac{dP}{dx_{m-2}}, \\
\frac{dp}{dx_m} &= \frac{dP}{dx_{m-1}}.
\end{aligned}\right\}(1)
\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dy} &= d\frac{dP}{dy}, \\
\frac{dp}{dy_1} &= d\frac{dP}{dy_1} + \frac{dP}{dy}, \\
\frac{dp}{dy_2} &= d\frac{dP}{dy_2} + \frac{dP}{dy_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dp}{dy_{n-1}} &= d\frac{dP}{dy_{n-1}} + \frac{dP}{dy_{n-2}}, \\
\frac{dp}{dy_n} &= \frac{dP}{dy_{n-1}}.
\end{aligned}\right\}(2)$$

Du premier de ces deux systèmes d'équations on déduit, par l'élimination successive des différentielles de $\frac{dP}{dx_{m-1}}$, $\frac{dP}{dx_{m-2}}$, ... $\frac{dP}{dx_1}$, $\frac{dP}{dx}$,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{dx_{m-1}} &= \frac{dp}{dx_m}, \\
\frac{dP}{dx_{m-2}} &= \frac{dp}{dx_{m-1}} - d\frac{dp}{dx_m}, \\
\frac{dP}{dx_{m-3}} &= \frac{dp}{dx_{m-2}} - d\frac{dp}{dx_{m-1}} + d^2\frac{dp}{dx_m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dP}{dx} &= \frac{dp}{dx_1} - d\frac{dp}{dx_2} + d^2\frac{dp}{dx_3} - \ldots\ldots\ldots \mp d^{m-1}\frac{dp}{dx_m}, \\
0 &= \frac{dp}{dx} - d\frac{dp}{dx_1} - d^2\frac{dp}{dx_2} - \ldots\ldots \mp d^{m-1}\frac{dp}{dx_{m-1}} \pm d^m\frac{dp}{dx_m}.
\end{aligned}\right\}(3)$$

La dernière de ces équations est une équation de condition à laquelle doit satisfaire la différentielle p de la fonction P.

Les équations (2), traitées exactement de la même manière, donnent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_{n-1}}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_n},\\
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_{n-2}}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_{n-1}}-\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_n},\\
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_{n-3}}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_{n-2}}-\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_{n-1}}+\mathrm{d}^2\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_1}-\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_2}+\mathrm{d}^2\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_3}-\ldots\ldots\mp\mathrm{d}^{n-1}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_n},\\
&0=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_1}+\mathrm{d}^2\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_2}-\ldots\ldots\mp\mathrm{d}^{n-1}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_{n-1}}\pm\mathrm{d}^n\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y_n}.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Equations dont la dernière est une nouvelle équation de condition à laquelle doit encore satisfaire la différentielle p de la fonction P.

Avant d'aller plus loin, remarquons que, si P est une fonction de

$$x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ \ldots\ldots\ x_{m-1},$$

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ y_i,\ y_{i+1},\ y_{i+2},\ \ldots\ldots\ y_{n-1},$$

seulement, c'est-à-dire, si cette fonction ne contient aucune des quantités

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_{i-1},$$

auquel cas on aura

$$\frac{dP}{dx}=0,\quad \frac{dP}{dx_1}=0,\quad \frac{dP}{dx_2}=0,\ldots\ldots\ldots\frac{dP}{dx_{i-1}}=0,$$

$$\frac{dp}{dx}=0,\quad \frac{dp}{dx_1}=0,\quad \frac{dp}{dx_2}=0,\ldots\ldots\ldots\frac{dp}{dx_{i-1}}=0;$$

l'application du même procédé nous conduira aux résultats

$$d\frac{dP}{dx_i}=\frac{dp}{dx_i}, \qquad (5)$$

$$0=\frac{dp}{dx_i}-d\frac{dp}{dx_{i+1}}+d^2\frac{dp}{dx_{i+2}}-\ldots\ldots\ldots\pm d^{m-i}\frac{dp}{dx_m}. \qquad (6)$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite de ces recherches.

Lorsqu'on se sera assuré que p est une différentielle exacte, les équations (3) et (4) offriront le moyen le plus simple pour remonter à son intégrale P, par les quadratures seulement. Mais il nous reste à démontrer présentement que toute fonction différentielle qui satisfait identiquement aux dernières équations (3) et (4) est nécessairement par là même une différentielle exacte.

Premièrement, soit u_i une fonction quelconque de

$$x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\ldots\ldots\ldots x_m,\ y,\ y_1,\ y_2,\ldots\ldots y_n,$$

assujettie à la seule condition de satisfaire à l'équation

$$A_i=\frac{du_i}{dx_i}-d.\frac{du_i}{dx_{i+1}}+d^2\frac{du_i}{dx_{i+2}}-\ldots\ldots\pm d^{m-i}\frac{du_i}{dx_m} \qquad (7)$$

dans laquelle A_i est une quantité constante quelconque.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{du_i}{dx_i}=A_i+d\left\{\frac{du_i}{dx_{i+1}}-d\frac{du_i}{dx_{i+2}}+d^2\frac{du_i}{dx_{i+3}}-\ldots\mp d^{m-i-1}\frac{du_i}{dx_m}\right\};$$

d'où l'on conclura que, comme le premier membre ne renferme pas de différentielles de x et y d'un ordre plus élevé que x_m, y_n, la partie du second membre comprise entre les crochets ne saurait renfermer de différentielles des mêmes variables d'un ordre supérieur à x_{m-1} et y_{n-1} ; et que, par conséquent, il est possible de trouver une fonction P_i de x_i, x_{i+1}, ... x_{m-1}, y, y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dP_i}{dx_i} = \frac{du_i}{dx_{i+1}} - d\frac{du_i}{dx_{i+2}} + d^2\frac{du_i}{dx_{i+3}} - \ldots\ldots \mp d^{m-i-1}\frac{du_i}{dx_m},$$

au moyen de laquelle nous aurons, en ayant égard à l'équation (5),

$$\frac{du_i}{dx_i} = A_i + d\frac{dP_i}{dx_i} = A_i + \frac{dp_i}{dx_i},$$

et par suite

$$u_i = A_i x_i + p_i + u_{i+1}, \qquad (8)$$

en désignant par u_{i+1} une fonction de x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_m, y, y_1, y_2, ... y_n, qu'il faudra déterminer d'une manière convenable.

Substituant cette valeur de u_i dans l'équation (7) et observant, équation (6), que, puisque p_i est une différentielle exacte, on doit avoir identiquement,

$$o = \frac{dp_i}{dx_i} - d\frac{dp_i}{dx_{i+1}} + d^2\frac{dp_i}{dx_{i+2}} - \ldots\ldots \pm d_{m-i}\frac{dp_i}{dx_m},$$

nous trouverons, réductions faites,

$$o = d\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}} - d^2\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}} + d^3\frac{du_{i+1}}{dx_{i+1}} - \ldots\ldots \mp d^{m-i}\frac{du_{i+1}}{dx_m},$$

ou, en intégrant,

$$A_{i+1}=\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}x_{i+1}}-\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}x_{i+2}}+\mathrm{d}^2\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}x_{i+3}}-\ldots\ldots\mp\mathrm{d}^{m-i-1}\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}x_m};$$

ce qui fait voir que u_{i+1} est entièrement de même nature que u_i.

Cela posé, si u est une fonction de x, x_1, x_2, ... x_m, y, y_1, y_2, ... y_n, qui satisfasse à la condition

$$0=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1}+\mathrm{d}^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_2}-\ldots\ldots\pm\mathrm{d}^m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_m},$$

nous en tirerons, par des opérations analogues à celles qui viennent de nous conduire à l'équation (8)

$$u=p+u_1,$$

$$u_1=A_1x_1+p_1+u_2,$$

$$u_2=A_2x_2+p_2+u_3,$$

$$u_3=A_3x_3+p_3+u_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{m-1}=A_{m-1}x_{m-1}+p_{m-1}+u_m,$$

$$u_m=A_mx_m+p_m+Y;$$

Y étant, dans la dernière, une fonction de y, y_1, y_2, ... y_n seulement.

Ajoutant ces diverses équations, et faisant, pour abréger,

$$q=A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+\ldots\ldots+A_mx_m$$
$$+p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots\ldots+p_m,$$

nous trouverons enfin

$$u=q+Y, \qquad (9)$$

dans laquelle q est évidemment une différentielle exacte, puisque chacun des termes dont cette fonction se compose est une semblable différentielle.

Si u ne renfermait ni y ni ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, la fonction que nous avons représentée par Y serait constante et par conséquent nulle, sans quoi u serait composée de termes hétérogènes, ce qui ne peut jamais avoir lieu, ainsi u serait alors *une différentielle exacte*.

Si, au contraire, u renfermait y et ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, mais qu'elle rendît identique l'équation

$$0=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y_1}+\mathrm{d}^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y_2}-\ldots\ldots\ldots\pm\mathrm{d}^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y_n},$$

la fonction Y pourrait ne pas être nulle; mais, en substituant dans cette équation la valeur de u que nous venons de donner, et observant que, puisque q est une différentielle exacte, l'on a

$$0=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}-\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y_1}+\mathrm{d}^2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y_2}-\ldots\ldots\ldots\pm\mathrm{d}^n\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y_n},$$

nous trouverions, réductions faites,

$$0=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}-\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y_1}+\mathrm{d}^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y_2}-\ldots\ldots\ldots\pm\mathrm{d}^n\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y_n};$$

et de là on conclut, comme ci-dessus, que, puisque Y ne renferme que y et ses dérivées $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, cette fonction Y est nécessairement une différentielle exacte, de sorte que, dans ce cas comme dans le précédent, u est encore *une différentielle exacte*.

Pour simplifier la question, nous avons supposé que toutes ces fonctions ne renfermaient que deux variables x et y et leurs dérivées;

rivées ; mais il est facile de voir qu'elle ne se compliquerait pas beaucoup, si l'on voulait considérer une fonction d'un plus grand nombre de variables, et que de plus, les conclusions seraient absolument les mêmes.