ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Algèbre élémentaire. Démonstration abrégée du binome de Newton, pour le cas de l'exposant entier et positif

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 205-206
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__205_1>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration abrégée du BINOME DE NEWTON, *pour le cas de l'exposant entier et positif ;*

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

SOIT, pour abréger,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-\mu+2}{\mu-1}=\mathrm{f}(m,\mu)\ ;$$

il s'agit de prouver que le terme général du développement de $(x+a)^m$ est $\mathrm{f}(m,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}$, ou, ce qui revient au même, que

$$(x+a)^m=\Sigma\{\mathrm{f}(m,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\ ; \qquad (1)$$

en développant le second membre depuis $\mu=1$ jusqu'à $\mu=\infty$.

Cette assertion se vérifiant facilemeut pour les quelques premières valeurs de m, tout se réduit à prouver que l'équation (1) aura lieu si l'on a

$$(x+a)^{m-1}=\Sigma\{\mathrm{f}(m-1,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}\ ; \qquad (2)$$

or, on tire de là, en multipliant de part et d'autre par $x+a$,

$$(x+a)^m=(x+a)\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}\;; \qquad (3)$$

d'où il suit, en comparant (3) à (1) que tout se réduit à prouver que

$$(x+a)\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}. \qquad (4)$$

Or, en faisant, tour à tour, la multiplication par x et par a, et prenant les termes généraux correspondans des deux produits, on trouve

$$x\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\,,$$

$$a\Sigma\{f(m-1\,,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{f(m-1\,,\mu-1)a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\}\;;$$

donc, en ajoutant

$$(x+a)\Sigma\{f(m-1,\mu)a^{\mu-1}x^{m-\mu}\}=\Sigma\{[f(m-1,\mu)+f(m-1,\mu-1)]a^{\mu-1}x^{m-\mu+1}\} \quad (5)$$

or, il est très-facile de s'assurer que

$$f(m-1\,,\mu)+f(m-1\,,\mu-1)=f(m\,,\mu)\;;$$

donc l'équation (4), et par suite l'équation (1) se trouve pleinement justifiée (*).

(*) On a déjà donné dans ce recueil (tom. II, pag. 207) une démonstration de la formule du binome, indépendante, comme celle-ci, de la théorie des combinaisons.

J. D. G.