ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Analise transcendante. Dissertation sur la théorie des logarithmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 275-279
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__275_1>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Dissertation sur la théorie des logarithmes ;

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier de génie, ancien élève de l'école polytechnique.

EULER a démontré que, dans chaque système logarithmique, un même nombre a une infinité de logarithmes différens, dont un seul est réel et tous les autres imaginaires. La réciproque de cette proposition, qui ne paraît avoir encore été jusqu'ici démontrée par personne, est également vraie, c'est-à-dire que, pour une base donnée quelconque, un même logarithme appartient à une infinité de nombres différens.

Démontrons d'abord la proposition directe. On sait que

$$\text{Log}.x=n(\sqrt[n]{x}-1) \qquad (1)$$

pourvu que, dans cette expression, on fasse $n=\infty$ (*). Ainsi $\sqrt[n]{x}$ ayant une infinité de valeurs, on peut déjà, au premier coup-d'œil, conclure de suite que $\text{Log}.x$ a également une infinité de valeurs. Mais il est aisé, en outre, d'en donner l'expression. Soit d'abord x positif; on peut écrire

$$\text{Log}.x=n(\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{1}-1),$$

où $\sqrt[n]{x}$ représentera alors uniquement la racine $n.^{me}$ réelle de x; or, on sait que

$$\sqrt[n]{1}=\text{Cos.}\left(\frac{p\pi}{n}\right)+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\left(\frac{p\pi}{n}\right),$$

(*) On sait en effet que, d'une part,

$$\text{Log}.(1+y)=\frac{y}{1}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots\ldots,$$

on sait d'ailleurs que

$$n(\sqrt[n]{1+y}-1)=y-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{y^2}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{y^3}{3}$$

$$-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{3n}\right)\frac{y^4}{4}+\ldots\ldots$$

Or, dans le cas où n est infini, les seconds membres de ces deux équations deviennent égaux; donc on a, sous la même condition

$$\text{Log}.(1+y)=n(\sqrt[n]{1+y}-1);$$

équation qui devient celle du texte, en y changeant $1+y$ en x.

J. D. G.

où

où p est un nombre entier pair quelconque; et à cause de $n=\infty$ on peut écrire simplement

$$\sqrt{1}=1+\sqrt{-1}\,.\,\frac{p\varpi}{n}\quad;$$

donc

$$\text{Log.}x=n\left\{\left(1+\sqrt{-1}\,.\,\frac{p\varpi}{n}\right)\sqrt[n]{x}-1\right\}=n(\sqrt[n]{x}-1)+p\varpi\sqrt[n]{x}.\sqrt{-1}\;;$$

si donc on représente simplement par $\text{l}x$ le logarithme réel de x, on aura

$$\text{Log.}x=\text{l}x+p\varpi\sqrt[n]{x}\,.\,\sqrt{-1}\;;$$

et comme, à cause de $n=\infty$, on a $\sqrt[n]{x}=1$, on pourra écrire simplement

$$\text{Log.}x=\text{l}x+p\varpi\sqrt{-1}\;.$$

Par un raisonnement analogue, on prouvera que

$$\text{Log.}(-x)=\text{l}x+i\varpi\sqrt{-1}\;,$$

où i désigne un nombre entier impair quelconque.

La réciproque se tire de la même équation (1) qui, étant résolue par rapport à x, donne

$$x=\left\{1+\frac{\text{Log}\,x}{n}\right\}^n\;;$$

d'où, à cause de n infini, on peut conclure

$$x=\left\{1+\frac{\text{Log.}x}{n}\right\}^{n+\frac{1}{k}}=\left\{1+\frac{\text{Log.}x}{n}\right\}^n.\sqrt[k]{1+\frac{\text{Log.}x}{n}}\;;$$

et, comme cette formule a lieu quel que soit k, il est permis de le supposer entier et positif. Si donc nous représentons par N le nombre réel correspondant au logarithme réel donné, à cause de n infini, d'où résulte $\frac{\text{Log}.x}{n}=0$, nous aurons

$$x=N\sqrt[k]{1}\,, \qquad (2)$$

formule qui, comme la formule (1), est susceptible d'une infinité de valeurs différentes. On peut d'ailleurs vérifier immédiatement cette dernière formule, en prenant les logarithmes des deux membres; on a ainsi

$$\text{Log}.x=\text{Log}.N+\frac{\text{Log}.1}{k}=\text{Log}.N=\text{Log}.x\,,$$

et cela quel que soit k.

Ces considérations nous semblent de nature à terminer, une fois pour toutes, le différend qui s'est élevé autrefois entre Euler et d'Alembert, sur la nature des logarithmes des quantités négatives, en montrant que la vérité était du côté du dernier de ces deux illustres géomètres. En effet, puisque, dans l'expression générale $N\sqrt[k]{1}$, se trouvent compris, comme cas particuliers, les nombres $+N$ et $-N$, nous devons en conclure avec lui que les logarithmes des quantités négatives sont les mêmes que ceux de ces mêmes quantités prises positivement. Au surplus, voici une autre démonstration de cette dernière proposition qui est tout aussi concluante.

Soit

$$z=\frac{x^2}{1+x^2}\,, \qquad \text{d'où} \qquad x^2=\frac{z}{1-z}\;;$$

et par suite

$$\text{Log}.x=\tfrac{1}{2}[\text{Log}.z-\text{Log}.(1-z)]\;;$$

or,

$$\text{Log}.z=-\left\{\frac{1-z}{1}+\frac{(1-z)^2}{2}+\frac{(1-z)^3}{3}+\ldots\ldots\right\}$$

d'où

$$\text{Log.}(1-z) = -\left\{\frac{1}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\ldots\right\};$$

donc, en retranchant et remettant ensuite pour z sa valeur en x,

$$\text{Log.}x = \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6-1}{(x^2+1)^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^8-1}{(x^2+1)^4} + \ldots\right\}$$

Cette série nouvelle est remarquable en ce qu'elle converge toujours, quelque valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative, grande ou petite qu'on y mette pour x, et en ce qu'elle reste aussi la même en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x, de sorte que sa convergence, peu rapide à la vérité, demeure la même dans les deux cas, bien que la somme de ses termes puisse différer singulièrement de l'un à l'autre. Mais ce qui la rend principalement digne de remarque, et ce qui nous détermine à la faire connaître, c'est que, ne contenant que des puissances paires, elle est tout-à-fait indifférente au signe de x, et prouve ainsi sans réplique que $\text{Log.}(-x) = \text{Log}\,x$.

Au surplus, malgré le peu de convergence de cette formule, on pourrait en tirer parti pour le calcul des tables, en y faisant $x = \frac{p}{q}$, comme dans la formule ordinaire, et en prenant ensuite pour p et q deux nombres très-grands et très-peu différens.