ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Questions résolues. Démonstration du théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 280-285
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__280_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie élémentaire énoncé à la page 28 du présent volume ;

Par M. QUERRET, chef d'institution à St-Malo.

POUR rendre d'un abord plus facile la démonstration du théorème dont il s'agit, nous le convertirons en problème, en nous proposant la question suivante :

PROBLÈME. Quel est le lieu des points du plan d'un triangle desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, l'aire du triangle formé par les droites qui joindront deux à deux les pieds de ces trois perpendiculaires soit constante et égale à celle d'un quarré donné ?

Solution. Soient S, S′, S″ les trois sommets du triangle donné ; α, α', α'' les angles qui leur répondent respectivement, et C, C′, C″ les côtés respectivement opposés. Soit pris le sommet S″ pour origine des coordonnées rectangulaires, auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque ; et soient alors a, b, les coordonnées du sommet S, et a', b', celles du sommet S′ ; en prenant X, Y pour symboles des coordonnées courantes, les équations des trois côtés du triangle seront, savoir :

Pour C $\qquad b'X-a'Y=0\,,$

Pour C′ $\qquad bX-aY=0$,

Pour C″ $\quad (b-b')(X-a)-(a-a')(Y-b)=0$.

Désignant ensuite respectivement par p, p', p'' les perpendiculaires abaissées sur les directions de ces côtés d'un point quelconque P du plan du triangle que pourtant, pour fixer les idées, nous supposerons d'abord dans son intérieur, et donc nous supposerons les coordonnées x et y, nous aurons

$$p=\frac{b'x-a'y}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\frac{b'x-a'y}{c}\ ,$$

$$p'=\frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ay-bx}{c'}\ ,$$

$$p''=\frac{(b-b')(x-a)-(a-a')(y-b)}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}}=\frac{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')}{c''}\ .$$

En désignant donc par Q, Q′, Q″ les pieds de ces perpendiculaires, se rappelant que l'aire d'un triangle est la moitié du produit de deux de ses côtés et du sinus de l'angle compris, et remarquant en outre

$$\text{Sin.}(p',p'')=\text{Sin.}\alpha=\frac{ab'-ba'}{c'c''}\ ,$$

$$\text{Sin.}(p,p'')=\text{Sin.}\alpha''=\frac{ab'-ba'}{cc''}\ ,$$

$$\text{Sin.}(p,p')=\text{Sin.}\alpha''=\frac{ab'-ba'}{c''c}\ ;$$

on trouvera

$$Triang.Q'PQ''=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}(a'^2+b'^2)(ay-bx)\{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')\},$$

$$Triang.Q''PQ=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}(a^2+b^2)(b'x-a'y)\{(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')\},$$

$$Triang.QPQ'=\frac{ab'-ba'}{2c^2c'^2c''^2}\{(a-a')^2+(b-b')^2\}(ay-bx)(b'x-a'y).$$

En prenant la somme de ces résultats, on obtiendra l'aire du triangle QQ'Q'' dont il s'agit, qu'on trouvera être, en développant, réduisant et ordonnant,

$$Triang.QQ'Q''=-\frac{(ab'-ba')^2}{2c^2c'^2c''^2}\{(ab'-ba')x^2+(ab'-ba')y^2-(b'c'^2-bc^2)x-(ac^2-a'c'^2)y\}.$$

Cette aire peut être positive ou négative, suivant la situation du point P ; mais son signe n'étant ici d'aucune considération, il suffira, pour que ce point P résolve le problème, que, prise en *plus* ou en *moins*, elle soit équivalente à un quarré donné k^2 ; où, ce qui revient au même, il suffira que, prise telle qu'elle est, elle soit égale à $\pm k^2$, ce qui établira entre x et y la double équation

$$(ab'-ba')^2\{(ab'-ba')x^2+(ab'-ba')y^2-(b'c'^2-bc^2)x-(ac^2-a'c'^2)y\}\pm 2c^2c'^2c''^2k^2=0;$$

équation commune à deux cercles concentriques.

En posant

$$b'c'^2-bc^2=2(ab'-ba')\alpha, \quad ac^2-a'c'^2=2(ab'-ba')\beta,$$

d'où

$$\alpha=\frac{b'c'^2-bc^2}{2(ab'-ba')}, \quad \beta=\frac{ac^2-a'c'^2}{2(ab'-ba')},$$

cette équation deviendra

$$(ab'-ba')^3(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y)\pm 2c^2c'^2c''^2k^2=0\,,$$

et pourra ensuite être mise sous cette forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2\mp\frac{2c^2c'^2c''^2k^2}{(ab'-ba')^3}\;;$$

équation commune à deux cercles concentriques dont le centre commun a pour coordonnées α et β. Mais il est connu, et il est d'ailleurs facile de s'assurer que α et β sont aussi les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle proposé $SS'S''$; d'où il suit qu'en représentant par R le rayon de ce dernier cercle, on doit avoir $\alpha^2+\beta^2=R^2$. D'un autre côté, en représentant par T l'aire de ce même triangle, on a

$$ab'-ba'=2T\,,\qquad R=\frac{cc'c''}{4T}=\frac{cc'c''}{2(ab'-ba')}\,,$$

d'où

$$\frac{2c^2c'^2c''^2}{(ab'-ba')^2}=8R^2\,,$$

et

$$\frac{2c^2c'^2c''^2}{(ab'-ba')^3}=\frac{4R^2}{T}\;;$$

ce qui donnera, en substituant

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\mp\frac{4R^2k^2}{T}=R^2.\frac{T\mp 4k^2}{T}\,.$$

En désignant donc par r et r' les rayons des deux cercles dont les circonférences résolvent le problème proposé, on aura

$$r^2=R^2.\frac{T-4k^2}{T}\,,\qquad r'^2=R^2.\frac{T+4k^2}{T}\;;$$

d'où

$$r^2+r'^2=2R^2\,,$$

et

$$k^2=\frac{T}{4R^2}(R^2-r^2)=\frac{T}{4R^2}(r'^2-R^2)\;.$$

Remarquons présentement que

$$T=\tfrac{1}{2}c'c''\text{Sin.}\alpha=\tfrac{1}{2}c''c\text{Sin.}\alpha'=\tfrac{1}{2}cc'\text{Sin.}\alpha''\;;$$

d'où

$$T^3=\tfrac{1}{8}c^2c'^2c''^2\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''\;,$$

on a d'ailleurs

$$4T^2R^2=\tfrac{1}{4}c^2c'^2c''^2\;;$$

donc en divisant

$$\frac{T}{4R^2}=\tfrac{1}{2}\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''\;;$$

et par suite

$$k^2=\tfrac{1}{2}(R^2-r^2)\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''=\tfrac{1}{2}(r'^2-R^2)\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'\text{Sin.}\alpha''\;.$$

De plus, si l'on représente par t la corde du cercle dont le rayon est R, tangente à celui dont le rayon est r, et par t' la corde du cercle dont le rayon est r', tangente à celui dont le rayon est R, on aura

$$R^2-r^2=\tfrac{1}{4}t^2\;,\qquad r'^2-R^2=\tfrac{1}{4}t'^2\;;$$

donc finalement

$$k^2=t^2.\frac{\text{Sin.}\alpha}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha'}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha''}{2}=t'^2.\frac{\text{Sin.}\alpha}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha'}{2}.\frac{\text{Sin.}\alpha''}{2}\;.$$

De tout cela résulte le théorème suivant :

THÉORÈME.

THÉORÈME. Si deux cercles concentriques au cercle circonscrit à un triangle, l'un intérieur et l'autre extérieur à celui-là, sont tels que la tangente à l'intérieur terminée de part et d'autre au circonscrit soit égale à la tangente au circonscrit terminée de part et d'autre à l'extérieur; de quelque point de la circonférence de l'un ou de l'autre de ces deux cercles qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés du triangle, le triangle qui aura ses sommets aux pieds de ces trois perpendiculaires aura toujours la même surface, laquelle sera égale au quarré de la tangente dont il vient d'être question multiplié par les moitiés des sinus des angles du triangle proposé.

Quelque grand que soit d'ailleurs le rayon d'un cercle concentrique au cercle circonscrit à un triangle donné; de quelque point de la circonférence du premier de ces deux cercles qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés de ce triangle, le triangle qui aura ses sommets aux pieds de ces perpendiculaires aura toujours une aire constante, et d'autant plus grande que le rayon de ce cercle aura été pris plus grand; mais si ce rayon est plus grand que la diagonale du quarré construit sur le rayon du cercle circonscrit, il n'y aura plus de cercle intérieur qui puisse donner naissance à un triangle de pareille surface.

En particulier, de quelque point de la circonférence du cercle circonscrit à un triangle qu'on abaisse des perpendiculaires sur les directions de ses trois côtés, le triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires aura une aire nulle, c'est-à-dire que ces trois points seront en ligne droite (*).

(*) Cette dernière partie du théorème avait déjà été démontrée, tom IV, pag. 251.