
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHE

Solution du problème d'analyse transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 294-302

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__294_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Solution du problème d'analyse transcendante énoncé à la page 128 du présent volume , suivie de la démonstration d'un théorème nouveau ;

Par M. ROCHE , capitaine d'artillerie de la marine , ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Quelle est la forme la plus générale des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme*

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0 ,$$

dans laquelle α et β représentent des fonctions déterminées quelconques de la constante arbitraire c ?

Solution. En supposant tour à tour l'équation intégrale résolue par rapport à $y-\beta$ et $x-\alpha$, on obtiendra des valeurs de cette forme

$$y-\beta = \Phi(x-\alpha) , \quad x-\alpha = \Psi(y-\beta) ,$$

où Φ et Ψ seront des fonctions déterminées de $x-\alpha$ et $y-\beta$, respectivement. En différentiant ces deux équations , et représentant , à l'ordinaire , par p le coefficient différentiel de y et par Φ' et Ψ' les dérivées respectives de Φ et Ψ , on trouvera

$$p = \Phi'(x-\alpha) , \quad 1 = p\Psi'(y-\beta) ,$$

équations qui, résolues, la première par rapport à $x-\alpha$ et l'autre par rapport à $y-\beta$, donneront

$$x-\alpha=\varphi(p), \quad y-\beta=\psi(p),$$

où φ et ψ seront également des fonctions déterminées de p ; et par suite

$$\alpha=x-\varphi(p), \quad \beta=y-\psi(p).$$

Mais α et β étant des fonctions déterminées de c sont aussi fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire, qu'il doit exister entre elles une relation déterminée. En supposant donc cette relation exprimée par l'équation

$$F(\alpha, \beta)=0,$$

et substituant, on obtiendra, pour l'équation différentielle demandée

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\}=0. \quad (\text{I})$$

Mais il est essentiel de remarquer que les fonctions φ et ψ ne sauraient être indépendantes; et rien n'est plus facile que d'assigner la relation qui doit exister entre elles. Si, en effet, on différentie les valeurs de $x-\alpha$ et $y-\beta$ trouvées ci-dessus, on aura

$$dx=\varphi'(p).dp, \quad dy=\psi'(p).dp,$$

φ' et ψ' étant les dérivées respectives de φ et ψ ; or, ces deux équations, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \psi'(p)=p\varphi'(p); \quad (\text{II})$$

relation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\psi(p) = f\varphi'(p) \cdot p dp ,$$

ou , en intégrant par parties ,

$$\psi(p) = p\varphi(p) - f\varphi(p) \cdot dp . (*)$$

Soit , par exemple , l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 ,$$

dans laquelle on suppose

$$\alpha = \rho \text{Cos}.c , \quad \beta = \rho \text{Sin}.c ,$$

c étant la constante arbitraire. En différentiant cette équation, il viendra

$$(x-\alpha) + p(y-\beta) = 0 .$$

En mettant dans la proposée et sa différentielle pour α et β leurs valeurs en c et éliminant ensuite c entre les deux équations résultantes, on aura, toutes réductions faites,

$$(1+p^2)(x^2+y^2+r^2-\rho^2)^2 = 4r^2(y+px)^2 ,$$

équation qui peut être mise sous cette forme

(*) Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Woisard, dans un mémoire qu'à raison de l'abondance des matières nous avons été contraint d'abrégé en le publiant.

$$\left\{x - \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2 + \left\{y - \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2 = \rho^2,$$

et qui rentre ainsi dans la formule (I). De plus, on a ici

$$\varphi(p) = \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \psi(p) = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}},$$

d'où

$$\varphi'(p) = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \psi'(p) = \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ce qui vérifie la relation (II).

Au moyen de ce qui précède, on peut aisément démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. Toute équation différentielle de la forme

$$F\{x - \varphi(p), y - \psi(p)\} = 0,$$

qui admet une solution particulière, a , par là même, une intégrale de la forme

$$f(x - \alpha, y - \beta) = 0,$$

dans laquelle α et β sont des fonctions d'une même constante arbitraire.

Et réciproquement toute équation différentielle de la première forme, dont l'intégrale est de la seconde, admet par là même une solution particulière.

Démonstration. En effet, 1.^o on sait que, pour obtenir la solution particulière d'une équation telle que

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\} = 0,$$

il faut, après l'avoir différenciée, égaler séparément à zéro et le multiplicateur de dp et la partie qui en est indépendante. Or, si l'on désigne respectivement par P et Q les dérivées du premier membre de cette équation, prises par rapport aux deux binômes $x-\varphi(p)$, $y-\psi(p)$, considérés comme deux variables, sa différentielle sera

$$Pdx + Qdy - \{P\varphi'(p) + Q\psi'(p)\} dp = 0;$$

afin donc que cette équation admette une solution particulière, il faudra qu'on ait séparément

$$Pdx + Qdy = 0, \quad P\varphi'(p) + Q\psi'(p) = 0,$$

équations entre lesquelles éliminant le rapport de P à Q , on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \varphi'(p) = p\psi'(p),$$

qui est précisément la relation (II), nécessaire pour que l'équation admette une intégrale de la forme

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0;$$

ce qui démontre déjà la première partie de la proposition.

2.° Réciproquement, soit

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0,$$

l'intégrale d'une équation différentielle, dans laquelle on suppose que α et β sont des fonctions d'une même constante c ; pour avoir la solution particulière de son équation différentielle, il faudra, comme l'on sait, éliminer la constante c entre cette équation et sa dérivée par rapport à cette lettre; mais, en représentant par P_1 et Q_1 les dérivées de son premier membre, prises par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$, considérés comme deux variables la dérivée dont il s'agit sera

$$P_1 dx + Q_1 d\beta = 0.$$

Si, au contraire, on différencie la proposée par rapport à x et y on aura

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0;$$

d'où il suit que la différentielle de sa solution particulière sera le résultat de l'élimination de c entre ces deux dernières. Or, on a vu par le problème précédent que cette différentielle était

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\} = 0.$$

avec la condition

$$\psi'(p') = p\varphi'(p);$$

or, en différentiant de nouveau l'équation différentielle obtenue, on parvient, comme nous l'avons déjà vu, à un résultat de la forme

$$P dx + Q dy - \{P\varphi'(p) + Q\psi'(p)\} dp = 0;$$

or, si l'on substitue, dans cette dernière équation, pour $\psi'(p)$ sa valeur $p\varphi'(p)$, et pour dy sa valeur $p dx$, on obtiendra

$$(P+pQ)\{dx-dp\varphi'(p)\}=0,$$

équation qui peut être satisfaite en posant

$$P+pQ=0 \quad \text{ou} \quad Pdx+Qdy=0$$

ce qui revient à dire que la différentielle

$$Pdx+Qdy-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}dp=0,$$

en y considérant p comme une constante, est égale à zéro, ce qui est précisément le caractère des solutions particulières; mais l'équation est aussi satisfaite en posant

$$dx-dp\varphi'(p)=0 \quad \text{d'où} \quad dy=dp\psi'(p)=0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$x-\alpha=\varphi(p), \quad y-\beta=\psi(p),$$

équations dans lesquelles α , β sont les constantes arbitraires, et qui donnent, par l'élimination de p ,

$$f(x-\alpha, y-\beta)=0.$$

Corollaire. Il résulte de là un moyen facile de ramener l'intégration d'une équation différentielle dans laquelle x ou y est donnée en fonction de p , lorsqu'elle ne peut être résolue par rapport à

cette

cette lettre, à l'intégration d'une fonction d'une seule variable, jointe à l'élimination.

Soit, en effet, l'équation proposée

$$x - \alpha = \varphi(p) ;$$

$\frac{dy}{dx}$ sera une fonction de $x - \alpha$ et conséquemment de p ; de sorte que l'intégration de cette équation donnera un résultat de la forme

$$y - \beta = \psi(p) ,$$

dans lequel β sera la constante arbitraire. En différentiant ces deux équations et éliminant entre leurs différentielles $\frac{dp}{dx}$, on obtiendra comme ci-dessus, l'équation de condition

$$\psi'(p) = p\varphi'(p) ,$$

et la fonction ψ sera donnée par l'intégration de la fonction $p\varphi'(p)$.

Si, au contraire, l'équation proposée est

$$y - \beta = \psi(p) ,$$

en posant

$$x - \alpha = \varphi(p) ,$$

la fonction φ serait donnée, à l'inverse, par l'intégration de la fonction $\frac{\psi'(p)}{p}$.

Dans l'un et dans l'autre cas, les fonctions φ et ψ étant connues, l'élimination de p entre les deux équations

$$x - \alpha = \varphi(\rho), \quad y - \beta = \psi(\rho)$$

conduira à l'intégrale cherchée. (*)

(*) M. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie à Metz, a aussi donné une solution du problème qui, pour le fond, ne diffère pas de celle qu'on vient de lire.