ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Solution du dernier des quatre problèmes de géométrie proposés à la page 304 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 302-307
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__302_1>

Solution du dernier des quatre problèmes de géométrie proposés a la page 304 du précédent volume ;

Par M. Ch. Sturm.

Problème. *Quelle est la surface courbe de chacun des points de laquelle menant à trois points fixes des droites, considérées comme les trois arêtes d'un angle trièdre, cet angle trièdre intercepte toujours des portions équivalentes d'un plan donné, fixe et indéfini ?*

Solution. Rapportons les points de l'espace à un système d'axes obliques, de manière que le plan donné soit celui des xy, mais sans rien statuer d'ailleurs sur l'origine ni sur la direction des axes.

Soient (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') les trois points donnés, et (x, y, z) le sommet de l'angle trièdre. Soient de plus (p, q), (p', q'), (p', q'') respectivement les points où le plan des xy est percé par les trois arêtes de cet angle trièdre, nous aurons

$$\frac{x-a}{z-c}=\frac{a-p}{c}, \qquad \frac{y-b}{z-c}=\frac{b-q}{c},$$

$$\frac{x-a'}{z-c'}=\frac{a'-p'}{c'}, \qquad \frac{y-b'}{z-c'}=\frac{b'-q'}{c'},$$

$$\frac{x-a''}{z-c''}=\frac{a''-p''}{c''}, \qquad \frac{y-b''}{z-c''}=\frac{b''-q''}{c''};$$

équations d'où on tire

$$p=\frac{az-cx}{z-c}, \qquad q=\frac{bz-cy}{z-c},$$

$$p'=\frac{a'z-c'x}{z-c'}, \qquad q'=\frac{b'z-c'y}{z-c'},$$

$$p''=\frac{a''z-c''x}{z-c''}, \qquad q''=\frac{b''z-c''y}{z-c''}.$$

Or, si l'on désigne par k^2 l'aire constante du triangle intercepté sur le plan des xy, en désignant par γ l'angle que comprennent les axes des x et des y, on aura, comme l'on sait

$$(pq'-p'q+p'q''-p''q'+p''q-pq'')\text{Sin.}\gamma=2k^2 \;;$$

sur quoi il faudra remarquer que k^2 peut être indifféremment positif ou négatif.

En mettant dans le premier membre de cette équation pour p, p', p'', q, q', q'' les valeurs déterminées ci-dessus, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z}{(z-c)(z-c')} \\[2ex]
+\dfrac{(b'c''-c'b'')x+(c'a''-a'c'')y+(a'b''-b'a'')z}{(z-c')(z-c'')} \\[2ex]
+\dfrac{(b''c-c''b)x+(c''a-a''c)y+(a''b-b''a)z}{(z-c'')(z-c)}
\end{array}\right\}=\frac{2k^2}{\text{Sin.}\gamma}\ .$$

Telle est donc l'équation de la surface demandée.

En y chassant les dénominateurs, développant et posant, pour abréger,

$$bc'-cb'+b'c''-c'b''+b''c-c''b=A\ ,$$

$$ca'-ac'+c'a''-a'c''+c''a-a''c=B\ ,$$

$$ab'-ba'+a'b''-b'a''+a''b-b''a=C\ ,$$

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=D\ ,$$

cette équation deviendra

$$(Ax+By+Cz-D)z^2\text{Sin.}\gamma=2k^2(z-c)(z-c')(z-c'')\ . \qquad (1)$$

Il faudra d'ailleurs se rappeler que k^2 peut être pris indistinctement en plus ou en moins ; de sorte qu'il y a proprement deux surfaces courbes qui résolvent le problème. Nous nous bornerons à discuter celle qui répond à k^2 positif.

Remarquons d'abord que l'équation du plan qui contient les trois points fixes est

$$Ax+By+Cz=D\ , \qquad (2)$$

qui, combinée avec (1), la réduit à

$$(z-c)(z-c')(z-c'')=0\ ; \qquad (3)$$

ce qui montre que si, par chacun des trois points fixes, on mène un plan parallèle au plan fixe, les trois plans, ainsi menés, couperont le plan des trôis points fixes suivant trois droites parallèles appartenant à la surface dont il s'agit. Ces trois droites, au surplus, ne sont autre chose que des parallèles menées par les trois points fixes à l'intersection du plan de ces trois points avec le plan fixe.

Les équations d'une parallèle quelconque à cette intersection sont

$$Ax+By+Cz=D' \quad \text{et} \quad z=C'\ . \qquad (4)$$

Pour savoir si cette parallèle coupe la surface dont il s'agit et en quels points, il faudra combiner ces deux dernières équations avec l'équation (1), ce qui donnera

$$(D'-D)C'^2\text{Sin.}\gamma=2k^2(C'-c)(C'-c')(C'-c'')\ ;$$

équation qui ne pourra être qu'absurde ou identique, d'où il suit que, suivant les valeurs de C' et D', la droite (4) ne percera pas la surface dont il s'agit ou bien s'y trouvera entièrement située; ce qui nous montre que cette surface est une surface cylindrique du troisième degré, ayant ses élémens parallèles à l'intersection du plan fixe avec celui des trois points fixes.

Prenons cette intersection pour axe des y, ses équations sont

$$Ax+By+Cz=D \qquad \text{et} \qquad z=0\ ;$$

mais les équations de l'axe des y doivent être

$$x=0\ , \qquad z=0\ ;$$

il faudra donc que ces quatre équations aient lieu à la fois, ce qui donnera

$$By-D=0\ ,$$

équation qui, devant avoir lieu quelle que soit y, donnera

$$B=0\ , \qquad D=0\ ;$$

l'équation (1) deviendra donc

$$(Ax+Cz)z^2\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)(z-c')(z-c'')\ ; \qquad (5)$$

équation que l'on reconnaît en effet pour celle d'une surface cylindrique, ayant ses arêtes parallèles à l'axe des y, et qui appartient en même temps à l'intersection de cette surface avec le plan des xz. On voit qu'en y faisant $z=0$, la valeur de x devient infinie, d'où l'on peut conclure que le plan fixe est un plan asymptotique de la surface cherchée.

Si l'un des trois points fixes, le point (a'', b'', c''), par exemple, était situé sur le plan fixe, on aurait $c''=0$, et l'équation (5) deviendrait, en divisant par z,

$$(Ax+Cz)z\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)(z-c')\ ;$$

c'est-à-dire qu'alors la surface cherchée se réduirait à une surface cylindrique du second ordre à base hyperbolique. Si le point

(a', b', c') se trouvait aussi sur ce plan, on aurait en outre $c'=0$; ce qui réduirait l'équation à

$$(Ax+Cz)\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)$$

équation d'un plan que l'on trouvera passer par le troisième point fixe et être parallèle à la droite qui joint les deux premiers, ainsi que cela doit être.

Si le plan que déterminent les trois points fixes, et dont l'équation est, en général,

$$Ax+By+Cz=D\,,$$

était parallèle au plan fixe; c'est-à-dire, si l'on avait $c=c'=c''$, cette équation devrait se réduire simplement à $z=c$; on devrait donc avoir, à la fois,

$$A=0\,,\qquad B=0\,,\qquad D=cC\,;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendrait, en substituant et en divisant par $z-c$,

$$Cz^2\text{Sin}.\gamma=2k^2(z-c)^2$$

équation commune à deux plans parallèles au plan fixe, ou plutôt à quatre, à raison du double signe dont k^2 est susceptible.