Analise transcendante. Note sur les conditions d'intégrabilité

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 319-323

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__319_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur les conditions d'intégrabilité;

Par M. B. D. C.

SOIENT x et y des fonctions quelconques d'une troisième variable t; et soient représentés, en général, pour abréger,

$$\frac{d^kx}{dt^k} \quad \text{par} \quad x_k\,,$$

$$\frac{d^ky}{dt^k} \quad \text{par} \quad y_k\,,$$

quel que puisse être d'ailleurs le nombre entier positif k. Soit V une fonction quelconque de

$$x\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\quad x_3\,,\ldots\ldots\ldots x_m\,,$$

$$y\,,\quad y_1\,,\quad y_2\,,\quad y_3\,,\ldots\ldots\ldots y_n\,,$$

où on suppose que m soit tout au plus égal à n, et posons

$$X=\left(\frac{dV}{dx}\right)-\frac{d\left(\frac{dV}{dx_1}\right)}{dt}+\frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2}\right)}{dt^2}-\frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3}\right)}{dt^3}+\ldots\pm\frac{d^m\left(\frac{dV}{dx_m}\right)}{dt^m}$$

$$Y=\left(\frac{dV}{dy}\right)-\frac{d\left(\frac{dV}{dy_1}\right)}{dt}+\frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_2}\right)}{dt^2}-\frac{d^3\left(\frac{dV}{dy_3}\right)}{dt^3}+\ldots\pm\frac{d^n\left(\frac{dV}{dy_n}\right)}{dt^n}$$

Si Vdt est une différentielle exacte, on aura, comme l'on sait (*),

(*) Voyez la page 197 du présent volume.

$X=0$, $Y=0$; et réciproquement, si ces deux équations ont lieu, $V\mathrm{d}t$ sera une différentielle exacte ; et telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la fonction différentielle $V\mathrm{d}t$, lorsque x et y sont deux variables indépendantes l'une de l'autre.

Mais si, au contraire, y était une fonction de x, c'est-à-dire, si l'on avait $y=\varphi(x)$, il est clair qu'alors une seule condition serait nécessaire et suffisante pour rendre intégrable la fonction différentielle $V\mathrm{d}t$. Mais quelle devrait être cette condition unique ? C'est ce que nous nous proposons ici de rechercher.

Désignons en général par $\varphi_k(x)$ la dérivée de l'ordre k de la fonction $\varphi(x)$, prise par rapport à x, quel que soit le nombre entier positif k ; à cause de $y=\varphi(x)$, on aura, en différentiant,

$$y\ =\varphi\ (x)$$

$$y_1=\varphi_1(x).x_1$$

$$y_2=\varphi_2(x).x_1^2+\varphi_1(x).x_2$$

$$y_3=\varphi_3(x).x_1^3+3\varphi_2(x).x_1x_2+\varphi_1(x).x_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Désignons par V' ce que devient V lorsqu'on y substitue ces valeurs en x, x_1, x_2, ... x_n pour y, y_1, y_2, ... y_n ; en posant

$$X'=\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_3}\right)}{\mathrm{d}t^3}+\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}x_n}\right)}{\mathrm{d}t^n},$$

$X'=0$ sera évidemment l'équation de condition qu'il s'agit de déterminer.

Or, on a

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx}\,\frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_1} = \frac{dV}{dx_1} + \frac{dy_1}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_n}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\frac{dV'}{dx_2} = \frac{dV}{dx_2} + \frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_2} + \frac{dy_3}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_3} + \ldots + \frac{dy_n}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dV'}{dx_n} = \frac{dV}{dx_n} + \frac{dy_n}{dx_n}\,\frac{dV}{dy_n};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\begin{aligned}
X' = {} & \frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx}\,\frac{dV}{dy} + \frac{dy_1}{dx}\,\frac{dV}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx}\,\frac{dV}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_i}{dx}\,\frac{dV}{dy_i} + \ldots \\
& - \frac{d\left(\frac{dV}{dx_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_1}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_1}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{dy_2}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_2}\right)}{dt} - \ldots - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} - \ldots \\
& + \frac{d^2\left(\frac{dV}{dx_2}\right)}{dt^2} \qquad + \frac{d^2\left(\frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_2}\right)}{dt^2} + \ldots + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} + \ldots \\
& - \frac{d^3\left(\frac{dV}{dx_3}\right)}{dt^3} \qquad\qquad - \ldots - \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^3} - \ldots \\
& + \ldots\ldots \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \pm \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}}
\end{aligned}$$

Considérons, dans ce développement, la colonne dont le rang est $i+2$, laquelle est, comme on le voit,

$$\frac{dy_i}{dx}\,\frac{dV}{dy_i} - \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\,\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots \pm \frac{d^{i+1}\left(\frac{dV}{dx_{i+1}}\right)}{dt^{i+1}}\,;$$

en la développant et ordonnant suivant les différentielles successives de $\frac{dV}{dy_i}$, on pourra lui donner la forme suivante :

$$\begin{array}{r|l|l|l}
\frac{dy_i}{dx} & \frac{dV}{dy_i} - \frac{dy_i}{dx_1} & \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt} + \frac{dy_i}{dx_2} & \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2} - \dots \pm \frac{dy_i}{dx_i}\,\frac{d^i\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^i} \\
- \frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)}{dt} & +2\,\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt} & -3\,\frac{d\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt} & + \dots \\
+ \frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_2}\right)}{dt^2} & -3\,\frac{d^2\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^2} & + \dots\dots & \\
- \frac{d^3\left(\frac{dy_i}{dx_3}\right)}{dt^3} & + \dots\dots & \pm \frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\,\frac{d^{i-2}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-2}} & \\
+ \dots\dots & \pm i\,\frac{d^{i-1}\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^{i-1}} & & \\
\pm \frac{d^i\left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)}{dt^i} & & &
\end{array}$$

Or, les coefficiens des termes,

$$\frac{dV}{dx_i}\,,\quad \frac{d\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt}\,,\quad \frac{d^2\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^2}\,,\dots\dots \frac{d^{i-1}\left(\frac{dV}{dy_i}\right)}{dt^{i-1}}\,,$$

de ce développement, égalés séparément à zéro, ne sont autre chose que les équations de condition qui exprimeraient que $y_i \mathrm{d}t^i$ est une différentielle exacte de l'ordre i; ces coefficiens doivent donc être nuls d'eux-mêmes, puisque $y_1 \mathrm{d}t^i$ est en effet une telle différentielle; ce développement se réduit donc simplement à son dernier terme $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i}\,\frac{\mathrm{d}^i\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_1}\right)}{\mathrm{d}t^i}$; c'est donc aussi à ce dernier terme que se réduit la $(i+2)^{\text{me}}$ colonne du développement de X'; d'où il suit que ce développement lui-même se réduit à

$$X'=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\ldots\ldots\pm\frac{\mathrm{d}^n\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x_n}\right)}{\mathrm{d}t^n}$$

$$+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}\,\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_1}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}\,\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_2}\right)}{\mathrm{d}t^2}-\ldots\pm\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x_n}\,\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y_n}\right)}{\mathrm{d}t^n};$$

mais il est visible que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}=\ldots\ldots\ldots=\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x_n};$$

donc, on aura

$$X'=X+Y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

puis donc que la condition d'intégrabilité est, dans le cas présent, $X'=0$, cette condition sera

$$X\mathrm{d}x+X\mathrm{d}y=0 \qquad \text{ou} \qquad Xx_1+Yy_1=0\,.$$

Cette conclusion est exactement celle de Lagrange dans sa 21.e leçon sur le *Calcul des fonctions* (*).

(*) Voyez la page 412 de l'édition in-8.° ou la page 12 du supplément in-4°.