ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Analise élémentaire. Sur le développement en fraction continue des racines des équations numériques du second degré

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 324-334
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__324_0>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le développement en fraction continue des racines des équations numériques du second degré;

Par M. ***.

On sait que toute racine d'une équation numérique du second degré est développable en une fraction continue périodique, soit immédiatement soit après un certain nombre de fractions intégrantes, et qu'à l'inverse la valeur complète d'une telle fraction est toujours racine d'une équation du second degré, qui peut toujours en être déduite.

Mais l'habitude où l'on est de n'admettre que des fractions intégrantes dont le numérateur est l'unité, fait que souvent, dans le développement des racines d'une équation du second degré en fraction continue, la périodicité ne se manisfeste que très-tard, soit parce que les périodes sont précédées d'un grand nombre de fractions intégrantes qui leur sont étrangères, soit parce que ces périodes elles mêmes sont composées d'un grand nombre de telles fractions, soit enfin parce que ces deux circonstances ont lieu à la fois.

Soit, par exemple, l'équation du second degré

$$x^2+7x-2=0\ ;$$

en la traitant par la méthode de Lagrange, il faut calculer huit transformées

transformées avant de pouvoir reconnaître la périodicité du développement de x en fraction continue, et l'on obtient finalement

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\ldots\ldots}}}}}}}}}}}$$

et encore ici le développement est-il immédiatement périodique.

Supposons que, la périodicité ne se manifestant ainsi que d'une manière tardive, on veuille déterminer, avec une approximation convenue à l'avance, la valeur de x dont on a le développement ; il pourra arriver de deux choses l'une ; ou bien le développement convergera assez rapidement pour qu'on ait atteint l'approximation désirée avant d'avoir épuisé la première période, auquel cas la périodicité ne sera d'aucun secours ; ou bien la convergence sera peu rapide, et alors on sera obligé de calculer un grand nombre de réduites, avant d'en rencontrer une qui remplisse l'objet qu'on a en vue ; et c'est en particulier ce qui arrive dans l'exemple que nous avons choisi.

Les réduites consécutives sont en effet,

$$\frac{1}{3}\,,\quad \frac{1}{4}\,,\quad \frac{2}{7}\,,\quad \frac{3}{11}\,,\quad \frac{11}{40}\,,\quad \frac{80}{291}\,,\ldots\ldots;$$

ce qui donne, comme l'on sait, pour la limite de l'erreur qui peut affecter la dernière

$$\frac{1}{(291)^2}=\frac{1}{84681}\,,$$

d'où l'on voit qu'en s'arrêtant à la sixième on n'est pas sûr de ne faire qu'une erreur moindre qu'un millionième d'unité.

En mettant, au contraire la proposée sous cette forme

$$x=\frac{2}{7+x}\,,$$

on en tire sur-le-champ

$$x=\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\ldots\ldots}}}}$$

développement immédiatement périodique, où toutes les fractions intégrantes sont égales, ce qui facilite beaucoup le calcul des réduites. Car soient $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ deux réduites consécutives quelconques, on aura

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{2}{7+\frac{P}{Q}}=\frac{2Q}{7Q+P}\,.$$

Mais, en outre, ces réduites convergeront beaucoup plus rapidement que celles que nous avons obtenues ci-dessus. Si on les forme, en effet, d'après la formule que nous venons d'écrire, et qu'on place en regard leurs différences consécutives, on obtiendra le tableau suivant

$$\text{Réduites}\ldots\ldots\ \frac{2}{7}\,,\quad \frac{14}{51}\,,\quad \frac{102}{371}\,,\quad \frac{742}{2699}\,,\quad \ldots\ldots$$

$$\text{Différences}\ldots\ +\frac{4}{7.51}\,,\ -\frac{8}{51.371}\,,\ +\frac{16}{371.2699}\,,\ -\frac{32}{2699.19635}\,,\ \ldots\ldots$$

d'où il est aisé de voir qu'ici la quatrième réduite est déjà beaucoup plus approchée que ne l'était la sixième dans le développement précédent.

On voit, par ce qui précède, que, si

$$\frac{P}{Q}\,,\quad \frac{P'}{Q'}\,,\quad \frac{P''}{Q''}\,,$$

sont trois réduites consécutives, on aura

$$P'=2Q\;,\qquad Q'=7Q+P\;,$$

$$P''=2Q'\;,\qquad Q''=7Q'+P'\;;$$

d'où on conclura

$$P''=7P'+2P\;,\qquad Q''=7Q'+2Q\;;$$

c'est-à-dire que les numérateurs ainsi que les dénominateurs des réduites successives forment une suite récurrente, dont l'échelle de relation est composée des deux termes 7 et 2 ; en conséquence de quoi on trouve, par les théories connues, pour la réduite générale du rang n.

$$\frac{2.7^{n-1}+\frac{n-2}{1}.2^2.7^{n-3}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}.2^3.7^{n-5}+\frac{n-4}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}2^4.7^{n-7}+\ldots.}{7^n+\frac{n-1}{1}.2.7^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}2^2.7^{n-4}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}2^3.7^{n-6}+\ldots..}$$

et pour sa différence avec la suivante, ou la limite de l'erreur qui l'affecte

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{2^n}{\left(7^n+\frac{n-1}{1}2.7^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}2^2.7^{n-4}+\ldots.\right)\left(7^u+\frac{n}{1}2.7^{n-2}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}2^2.7^{n-4}+\ldots\right)}.$$

A l'aide de ces formules, on trouvera immédiatement, et sans passer par le calcul des réduites intermédiaires que, par exemple, la dixième réduite est

$$\frac{2.7^9+8.2^2.7^7+21.2^3.7^5+20\ 2^4.7^3+5.2^5.7}{7^{10}+9.2.7^8+28.2^2.7^6+35.2^3.7^4+15.2^4.7^2+2^5},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{109995046}{400092427};$$

et qu'elle n'est pas fautive de la fraction

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{1024}{400092427.415816005}=\frac{2048}{1164553842381258945},$$

de sorte que, dans son développement en décimales, on peut compter, en toute sûreté, sur les 13 premiers chiffres après la virgule.

Généralement, si l'on a l'équation du second degré

$$x^2+qx-p=0,$$

où nous supposons p et q entiers positifs, on en tirera d'abord

$$x=\frac{p}{q+x};$$

et, par suite,

$$x=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dots\dots}}}$$

développement qui finira toujours par devenir convergent, quand bien même p serait plus grand que q; mais dont la convergence sera d'ailleurs d'autant plus rapide que p et q seront de plus grands nombres et qu'en même temps la fraction $\frac{p}{q}$ sera plus petite. C'est ce qu'on aperçoit clairement en observant qu'ici la $n.^{me}$ réduite est

$$\frac{pq^{n-1}+\frac{n-2}{1}p^2q^{n-3}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}p^3q^{n-5}+\frac{n-4}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}p^4q^{n-7}+\ldots\ldots\ldots}{q^n+\frac{n-1}{2}pq^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}p^2q^{n-4}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}p^3q^{n-6}+\ldots\ldots\ldots}$$

et que sa différence avec la suivante ou la limite de l'erreur qui l'affecte est

$$\frac{p}{q}\,\frac{p^n}{\left(q^n+\frac{n-1}{1}pq^{n-2}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}p^2q^{n-4}+\ldots\right)\left(q^n+\frac{n}{1}pq^{n-2}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}p^2q^{n-4}+\ldots\right)}.$$

Mais, toute équation du second degré dont les deux racines sont réelles ne saurait être mise immédiatement sous la forme

$$x^2+qx-p=0\ ,$$

de manière du moins que les deux nombres p et q soient entiers positifs très-grands, et le dernier beaucoup plus grand que l'autre; et conséquemment une de ses racines ne saurait être mise immédiatement sous la forme

$$x=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\ldots\ldots}}}$$

avec les mêmes conditions. Voyons donc ce qu'il y aura à faire, lorsque l'équation sera quelconque.

Pour plus de généralité, admettons un coefficient au premier terme, et soit la proposée

$$Ax^2+Bx+C=0\ ,$$

A, B, C étant des nombres entiers, et les deux derniers pouvant être indistinctement supposés positifs ou négatifs. En multipliant cette équation par n^2A, où n est un nombre entier arbitraire, positif ou négatif, l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$(nAx)^2+nB(nAx)+n^2AC=0 ,$$

puis, sous celle-ci,

$$(nAx-k+k)^2+nB(nAx-k+k)+n^2AC=0 ,$$

où k est un autre nombre entier arbitraire. En développant et ordonnant par rapport à $nAx-k$, cette équation deviendra

$$(nAx-k)^2+(2k+nB)(nAx-k)+(k^2+nBk+n^2AC)=0 ;$$

en posant donc

$$2k+nB=q , \quad -(k^2+nBk+n^2AC)=p ,$$

nous aurons

$$(nAx-k)^2+q(nAx-k)=p ,$$

d'où

$$nAx-k=\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}$$

et par suite

$$x=\frac{1}{nA}\left(k+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\cfrac{p}{q+\dotsb}}}\right.$$

tout se réduit donc à profiter de l'indétermination des deux nombres n et k, pour faire en sorte que p et q soient deux nombres positifs les plus grands possibles, de manière que q soit le plus grand des deux.

D'abord, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à k, pourvu que l'on prenne n de même signe que B et d'une grandeur suffisante, on pourra toujours rendre q positif, et si grand qu'on le voudra. En second lieu, si l'on remarque que l'équation

$$x^2+nBx+n^2AC=0$$

n'est autre chose que la proposée dont on aurait multiplié les racines par nA, on en conclura qu'à moins que cette dernière n'ait ses deux racines imaginaires, il doit y avoir, pourvu toutefois qu'on ait pris n assez grand, un certain nombre de valeurs entières k, k', k'';..... de x qui donnent des résultats négatifs, et par conséquent p positif; il ne s'agira donc que de prendre pour k celle des deux plus voisines des résultats positifs qui donnera une plus grande valeur à q.

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2-12x+11=0.$$

Nous aurons ici $A=3$, $B=-12$, $C=11$, ce qui nous donnera

$$q=2k-12n, \qquad p=-k^2+12nk-33n^2.$$

A cause de B négatif, il conviendra de prendre n négatif aussi; faisons-le donc égal à -10; nous aurons ainsi

$$q=2k+120, \ p=-k^2-120k-3300.$$

Il est clair que, pour rendre p positif, il faudra prendre k négatif; mais, afin que q soit positif aussi, il faudra que k n'excède pas 59. En ne plaçant ici que les substitutions de -40 à -45, les seules qui puissent offrir des résultats utiles, nous obtiendrons le tableau suivant :

$k=-40$,	$q=40$,	$p=-100$,
-41,	38,	-61,
-42,	36,	-24,
-43,	34,	$+11$,
-44,	32,	$+44$,
-45,	30,	$+75$.

On voit que la valeur $k=-43$ est celle qu'il faut adopter, puisqu'en même temps qu'elle rend p et q positifs, elle donne $p<q$; en faisant donc, dans la formule générale,

$$n=-10\,,\quad A=3\,,\quad k=-43\,,\quad p=11\,,\quad q=34\,,$$

nous aurons, pour le développement de l'une des racines de la proposée,

$$x=\frac{1}{30}\left(43-\cfrac{11}{34+\cfrac{11}{34+\cfrac{11}{34+\ldots\ldots}}}\right.$$

Si nous eussions fait $n=7$, nous aurions eu

$$q=2k-84\,,\qquad p=-k^2+84k-1617\,;$$

faisant alors pour k les substitutions de 50 à 55, nous aurions eu

$k=50$,	$q=16$,	$p=+83$,
51,	18,	$+66$,
52,	20,	$+47$,
53,	22,	$+26$,
54,	24,	$+3$,
55,	26,	-22;

d'où l'on voit qu'ici la valeur de k qu'il faut adopter comme rendant

dant p le plus petit possible par rapport à q est $k=54$; faisant donc

$$n=7\ ,\qquad k=54\ ,\qquad p=3\ ,\qquad q=24\ ,$$

et substituant dans la formule générale, nous aurons

$$x=\frac{1}{21}\left(54+\cfrac{3}{24+\cfrac{3}{24+\cfrac{3}{24+\ldots\ldots}}}\right.$$

développement plus simple et plus convergent que le précédent, et dans lequel l'emploi des trois premières fractions intégrantes suffit pour ne pas rendre la valeur de x fautive d'un dix millionième d'unité.

Le rapprochement des deux résultats auxquels nous venons de parvenir prouve donc que si, en général, il est avantageux de prendre un grand nombre pour n, la nature individuelle de ce nombre influe beaucoup aussi sur la convergence du développement, tellement qu'un plus petit nombre peut quelquefois le rendre plus convergent que ne le pourrait faire un plus grand.

La même équation, traitée par la méthode de Lagrange, donne

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}}}}$$

développement dans lequel il faut admettre dix fractions intégrantes au moins, pour que la valeur de x ne soit pas fautive d'un millionième d'unité.

Dès qu'on a le développement de l'une des racines de la proposée, rien n'est plus facile que d'obtenir celui de l'autre ; leur somme étant en effet $-\frac{B}{A}$ ou $-\frac{nB}{nA}$, cette dernière doit avoir pour expression

$$x = -\frac{1}{nA}\left(nB + k + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots\dots\right.$$

On doit remarquer, au surplus, que, bien que le développement de l'une des racines d'une équation du second degré soit rationnel, ce n'en est pas moins une fonction biforme, comme celles qui renferment un radical du second degré; puisqu'au moyen de ce développement on peut remonter à l'équation dont il est racine, et assigner ensuite l'autre racine de cette équation. Un tel développement *exprime* donc implicitement les deux racines de la proposée, bien qu'il puisse n'être propre qu'à l'*évaluation* de l'une d'elles.