
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

**Analyse transcendante. Loi du développement de la
tangente en fonction de l'arc**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 347-349

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__347_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Loi du développement de la tangente en fonction de l'arc ;

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

SOIT qu'on divise l'une par l'autre les deux séries qui donnent le sinus et le cosinus en fonction de l'arc, ou qu'on emploie tout autre procédé, on obtient également

$$\text{Tang. } x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \frac{21844}{6081075}x^{13} + \dots$$

série connue depuis long-temps, mais qu'on n'a pas enseigné à

prolonger à la seule inspection de ses premiers termes, faute de connaître la loi qui la régit.

Toute la difficulté se réduit à découvrir à quelle loi sont assujettis les coefficients numériques consécutifs

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{15}, \quad \frac{17}{315}, \quad \frac{62}{2835}, \quad \frac{1382}{155925}, \quad \frac{21844}{6081075}, \dots$$

or, cette loi, la voici :

Un certain nombre de termes étant déjà calculé, prenez, dans la série de ces termes, le double de la somme des produits tant des extrêmes que des termes également distans des extrêmes, ajoutez-y le carré du terme du milieu, si le nombre des termes est impair; en divisant le résultat par l'exposant que doit avoir le terme que vous voulez calculer, vous obtiendrez le coefficient de ce terme. On trouve en effet successivement

$$\frac{1}{3} = \frac{1^2}{3},$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}}{5},$$

$$\frac{17}{315} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{15} + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{7},$$

$$\frac{62}{2835} = \frac{2 \left(1 \cdot \frac{17}{315} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} \right)}{9}$$

$$\frac{1382}{155925} = \frac{2 \left(1 \cdot \frac{62}{2835} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{315} \right) + \left(\frac{2}{15} \right)^2}{11},$$

$$\frac{21844}{6081075} = \frac{2 \left(1 \cdot \frac{1382}{155925} + \frac{1}{3} \cdot \frac{62}{2835} + \frac{2}{15} \cdot \frac{17}{315} \right)}{13},$$

et ainsi de suite (*).

(*) Ceci n'est encore qu'une induction, et c'est sans doute déjà beaucoup; mais on peut prouver aisément que telle est en effet la loi de la série. Posons en effet

$$\text{Tang. } x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + Fx^{11} + \dots, \quad (1)$$

où l'on voit déjà que A doit être égal à l'unité; en différenciant deux fois consécutivement, il viendra

$$\frac{1}{\text{Cos.}^2 x} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + 11Fx^{10} + \dots, \quad (2)$$

$$\frac{\text{Tang. } x}{\text{Cos.}^2 x} = 1.3Bx + 2.5Cx^3 + 3.7Dx^5 + 4.9Ex^7 + 5.11Fx^9 + \dots \quad (3)$$

Comparant ensuite le produit des équations (1) et (2) à l'équation (3), on aura

$$\begin{aligned} (A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \dots)(Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \dots) \\ = 1.3Bx + 2.5Cx^3 + 3.7Dx^5 + 4.9Ex^7 + 5.11Fx^9 + \dots \end{aligned}$$

ou, en développant le premier membre et ordonnant,

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} A^2x + AB & x^3 + AC & x^5 + AD & x^7 + AE & x^9 + AF & x^{11} + \dots & \\ +3AB & +3B^2 & +3BC & +3BD & +3BE & +\dots & \\ & +5AC & +5BC & +5C^2 & +5CD & +\dots & \\ & & +7AD & +7BD & +7CD & +\dots & \\ & & & +9AE & +9BE & +\dots & \\ & & & & 11AF & +\dots & \\ & & & & & +\dots & \end{array}$$

$$= 1.3Bx + 2.5Cx^3 + 3.7Dx^5 + 4.9Ex^7 + 5.11Fx^9 + \dots$$