ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

W. H. TALBOT

Questions résolues. Solution des problèmes d'analise transcendante, proposés à la page 247 du XIII.e volume du présent recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 88-95

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__88_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des problèmes d'analise transcendante, proposés à la page 247 du XIII.e volume du présent recueil ;

Par M. W. H. Talbot, membre de la société philosophique de Cambridge.

V page 187

1. Pour sommer la série

$$S=\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos}.5x}{5}-\frac{a^7\text{Cos}.7x}{7}+\ldots.$$

posons $\text{Cos}.x=\frac{1}{2}(u+v)$, avec la relation $uv=1$; nous aurons, comme l'on sait,

---

nérales dont jouit cette espèce d'étendue ; car certainement, de même que toute surface courbe, quelle qu'en soit la nature, a en tous ses points deux courbures principales, *maximum* et *minimum*, perpendiculaires l'une à l'autre ; un milieu dont la densité varie suivant une loi mathématique quelconque, doit avoir en tous ses points quelque propriété indépendante de la nature particulière de cette loi.

Nous ne donnons ceci, au surplus, que comme un exemple, et la géométrie nouvelle que nous concevons et dont nous désirons voir composer des traités aurait bien d'autres objets à embrasser.

J. D. G.

Cos.nx

$$\text{Cos.}nx=\frac{1}{2}(u^n+v^n)\ ;$$

de sorte qu'en posant

$$U=\frac{au}{1}-\frac{a^3u^3}{3}+\frac{a^5u^5}{5}-\frac{a^7u^7}{7}+\ldots\ ,$$

$$V=\frac{av}{1}-\frac{a^3v^3}{3}+\frac{a^5v^5}{5}-\frac{a^7v^7}{7}+\ldots\ ,$$

nous aurons

$$S=\frac{1}{2}(U+V)\ ;$$

cela donne

$$U=\text{Arc}(\text{Tang.}=au)\ ,\qquad V=\text{Arc}(\text{Tang.}=av)\ ;$$

mais, en renversant le théorème connu,

$$\text{Tang.}(p+q)=\frac{\text{Tang.}p+\text{Tang}\,q}{1-\text{Tang.}p\,\text{Tang.}q}\ ,$$

on a

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=p')+\text{Arc}(\text{Tang.}=q')=\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{p'+q'}{1-p'q'}\right)\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=au)+\text{Arc}(\text{Tang.}=av)=\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{a(u+v)}{1-a^2uv}\right)\ ;$$

remettant donc $2\text{Cos.}x$ pour $u+v$ et 1 pour uv, il viendra finalement

$$S=\tfrac{1}{2}\,\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\right).$$

II. Pour sommer la seconde série

$$S=\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\text{Cos.}7x}{7}+\ldots\,;$$

nous poserons encore $\text{Cos.}x=\tfrac{1}{2}(u+v)$, avec la condition $uv=1$; alors, en posant

$$U=u+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^7}{7}+\ldots\ldots=\text{Arc}(\text{Sin.}=u)\,,$$

$$V=v+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^7}{7}+\ldots\ldots=\text{Arc}(\text{Sin.}=v)\,,$$

nous aurons

$$S=\tfrac{1}{2}(U+V)=\tfrac{1}{2}\{\text{Arc}(\text{Sin.}=u)+\text{Arc}(\text{Sin.}=v)\}\,;$$

donc

$$\left.\begin{array}{l}u=\text{Sin.}U\\ v=\text{Sin.}V\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-u^2}=\text{Cos.}U\,,\\ \sqrt{1-v^2}=\text{Cos.}V\,,\end{array}\right.$$

donc aussi

$$\text{Sin.}2S=\text{Sin.}(U+V)=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}\,,$$

ou, en quarrant,

$$\text{Sin.}^2 2S=u^2(1-v^2)+v^2(1-u^2)+2uv\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}\,,$$

en développant et observant que $uv=1$, et que conséquemment

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=(u+v)^2-2=4\mathrm{Cos.}^2x-2\ ,$$

on trouvera

$$\mathrm{Sin.}^2 2S=4\mathrm{Cos.}^2x-4+2\sqrt{4-4\mathrm{Cos.}^2x}=4\mathrm{Sin.}x-4\mathrm{Sin.}^2x\ ,$$

donc

$$\mathrm{Sin.}2S=2\sqrt{\mathrm{Sin.}x-\mathrm{Sin.}^2x} \quad \text{et} \quad 2S=\mathrm{Arc}(\mathrm{Sin.}=2\sqrt{\mathrm{Sin.}x-\mathrm{Sin.}^2x})\ ,$$

c'est-à-dire,

$$S=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Sin.}=2\sqrt{\mathrm{Sin.}x-\mathrm{Sin.}^2x})\ .\ (*)$$

(*) M. Querret trouve (tom. XIII, pag. 357)

$$S=\tfrac{1}{2}\mathrm{Arc}(\mathrm{Cos.}=2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Cos.}x-1)\ ,$$

résultat inconciliable avec celui que nous venons d'obtenir. Afin donc de découvrir quel est celui des deux qui doit être admis, recourons à des cas particuliers. Si, dans la série, nous faisons, tour-à-tour, $x=0$ et $x=\frac{\varpi}{1}$ elle deviendra, dans le premier cas,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots.\ ,$$

développement connu de $\frac{\varpi}{2}$, tandis que, dans le second, elle deviendra zéro; et c'est aussi ce que donne notre formule sommatoire; tandis que celle de M. Querret donne constamment, dans les mêmes circonstances,

$$S=\frac{\varpi}{2}\ .$$

III. Pour sommer la troisième série

$$S=\frac{\text{Cos}.x\text{Cos}.y}{1}-\frac{\text{Cos}.2x\text{Cos}.2y}{2}+\frac{\text{Cos}.3x\text{Cos}.3y}{3}-\ldots\ldots,$$

faisant d'abord, comme ci-dessus,

$$\text{Cos}.x=\tfrac{1}{2}(u+v)\,,\qquad uv=1\;;$$

en posant

$$U=\frac{u\text{Cos}.y}{1}-\frac{u^2\text{Cos}.2y}{2}+\frac{u^3\text{Cos}.3y}{3}-\frac{u^4\text{Cos}.4y}{4}+\ldots\ldots,$$

$$V=\frac{v\text{Cos}.y}{1}-\frac{v^2\text{Cos}.2y}{2}+\frac{v^3\text{Cos}.3y}{3}-\frac{v^4\text{Cos}.4y}{4}+\ldots\ldots;$$

nous aurons

L'erreur de cet habile géomètre paraît provenir de ce qu'après avoir posé (page 356)

$$\text{Sin}.P=\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x\;,$$

il en conclut ensuite

$$\text{Cos}.P=\sqrt{-2\sqrt{-1}\text{Sin}.x\text{Cos}.x}\;,$$

tandis qu'on doit avoir

$$\text{Cos}.P=\sqrt{2\text{Sin}.x(\text{Sin}.x-\sqrt{-1}\text{Cos}.x)}\;.$$

On est facilement exposé à ces sortes de méprises par l'emploi explicite des imaginaires, à raison de la complication des calculs. La méthode que nous employons ici n'est pas sujette à cet inconvénient.

Il y a, au surplus, une faute d'impression à la page 360, où le cosinus est devenu un sinus.

$$S=\tfrac{1}{2}(U+V) \ ;$$

de sorte que tout se réduira à sommer les séries U et V.

Pour y parvenir, nous poserons

$$\mathrm{Cos}.y=\tfrac{1}{2}(p+q) \ , \qquad pq=1 \ ;$$

alors, en faisant

$$P=\frac{up}{1}-\frac{u^2p^2}{2}+\frac{u^3p^3}{3}-\frac{u^4p^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+up) \ ,$$

$$Q=\frac{uq}{1}-\frac{u^2q^2}{2}+\frac{u^3q^3}{3}-\frac{u^4q^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+uq) \ ,$$

$$P'=\frac{vp}{1}-\frac{v^2p^2}{2}+\frac{v^3p^3}{3}-\frac{v^4p^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+vp) \ ,$$

$$Q'=\frac{vq}{1}-\frac{v^2q^2}{2}+\frac{v^3q^3}{3}-\frac{v^4q^4}{4}+\ldots\ldots=\mathrm{Log}.(1+vq) \ ,$$

nous aurons

$$U=\tfrac{1}{2}(P+Q)=\tfrac{1}{2}\{\mathrm{Log}.(1+up)+\mathrm{Log}.(1+uq)\} \ ;$$

$$V=\tfrac{1}{2}(P'+Q')=\tfrac{1}{2}\{\mathrm{Log}.(1+vp)+\mathrm{Log}.(1+uq)\} \ ;$$

c'est-à-dire,

$$U=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.(1+up)(1+uq)=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.[1+(p+q)u+u^2] \ ,$$

$$V=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.(1+vp)(1+vq)=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}.[1+(p+q)v+v^2] \ ,$$

ou encore

$$2U=\mathrm{Log}.(1+2u\mathrm{Cos}.y+u^2) \ , \qquad 2V=\mathrm{Log}.(1+2v\mathrm{Cos}.y+v^2) \ ;$$

donc

$$4S=2U+2V=\text{Log.}(1+2u\text{Cos.}y+u^2)+\text{Log.}(1+2v\text{Cos.}y+v^2)\ ;$$

c'est-à-dire ,

$$4S=\text{Log.}(1+2u\text{Cos.}y+u^2)(1+2v\text{Cos.}y+v^2)\ ;$$

en développant et se rappelant que $uv=1$, cela donnera

$$4S=\text{Log.}[2+u^2+v^2+4(u+v)\text{Cos.}y+4\text{Cos.}^2y]\ ;$$

mais

$$u+v=2\text{Cos.}x\quad,\qquad u^2+v^2=(u+v)^2-2=4\text{Cos.}^2x-2\ ;$$

donc

$$4S=\text{Log.}4(\text{Cos.}^2x+2\text{Cos.}x\text{Cos.}y+\text{Cos.}^2y)=\text{Log.}4(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)^2$$

ou

$$4S=2\text{Log.}(2\text{Cos.}x+2\text{Cos.}y)\ ,$$

d'où finalement

$$S=\tfrac{1}{2}\text{Log.}2(\text{Cos.}x+\text{Cos.}y)=\tfrac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ .$$

Nous avons donc , en résumé ,

$$1.^\circ\quad \frac{a\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}+\frac{a^5\text{Cos.}5x}{5}-\ldots=\tfrac{1}{2}\,\text{Arc}\left(\text{Tang.}=\frac{2a\text{Cos.}x}{1-a^2}\right)\ ,$$

$$2.^\circ\quad \frac{\text{Cos}\,x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\text{Cos.}5x}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=1-2\text{Sin.}x)\ ,$$

$$3.^\circ\quad \frac{\text{Cos}\,x\text{Cos}\,y}{1}-\frac{\text{Cos.}2x\text{Cos.}2y}{2}+\frac{\text{Cos.}3x\text{Cos.}3y}{3}-\ldots\ldots\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\,\text{Log.}4\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\ .$$

Il est aisé de parvenir , en suivant la même marche , à des sommes de séries beaucoup plus compliquées. Nous nous bornerons à en rapporter deux exemples , en nous dispensant de développer les calculs qui sont en tout semblables à ceux qu'on a vu ci-dessus.

On trouve, en premier lieu,

$$\frac{a\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{1}-\frac{a^3\text{Cos}\,3x\text{Cos.}3y}{3}+\frac{a^5\text{Cos.}5x\text{Cos.}5y}{5}-\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=\frac{4a(1-a^2)\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{(1+a^2)^2-4a^2(\text{Cos.}^2x\text{Cos.}^2y)}\right\}.$$

Dans le cas de $y=0$ ou $\text{Cos.}y=1$, cette somme devient celle de la première de nos trois séries, quoique sous une forme un peu différente.

On trouve, en second lieu,

$$\frac{a\text{Cos.}x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{a^3\text{Cos.}3x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^5\text{Cos.}x}{5}+\ldots=\frac{1}{2}\text{Arc}(\text{Cos.}=a-\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2\text{Cos.}^2x})$$

qui se change immédiatement dans la seconde série, lorsqu'on y fait $a=1$.

Si, dans ces diverses séries, on attribue à x, y, a des valeurs particulières, on en fera dériver une multitude d'autres plus ou moins remarquables. La troisième, par exemple, en supposant $y=x$, devient

$$\frac{\text{Cos.}x}{1}-\frac{2\text{Cos}\,^22x}{2}+\frac{3\text{Cos.}^33x}{3}-\ldots=\frac{1}{2}\text{Log.}4\text{Cos.}x\,.$$

On trouve, plus généralement,

$$\frac{a\text{Cos.}^2x}{1}-\frac{a^2\text{Cos.}^22x}{2}+\frac{a^3\text{Cos.}^23x}{3}-\ldots=\frac{1}{4}\text{Log.}\{(1-a^2)^2+4a(1+a^2)^2\text{Cos.}^2x\}.$$

Rome (mai 1823).