ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

STEIN
QUERRET

Démonstration des deux théorèmes de statique énoncés à la page 391 du XIV.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 129-132
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__129_1>

Démonstration des deux théorèmes de statique énoncés à la page 391 *du XIV.e volume des* Annales ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique ;

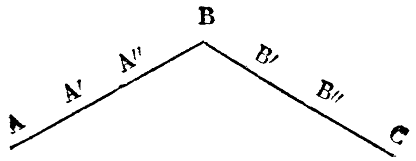
Et M. Querret, ancien chef d'institution.

THÉORÈME I. *Si des masses égales, placées d'abord arbitrairement sur les directions des côtés d'un polygone rectiligne fermé quel-*

conque, plan ou gauche, parcourent simultanément et dans le même sens, sur ces directions, des longueurs respectivement proportionnelles à celles de ces mêmes côtés, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

THÉORÈME II. Si des masses proportionnelles aux longueurs des côtés d'un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, placées d'abord arbitrairement sur les directions respectives de ces mêmes côtés, y parcourent simultanément dans le même sens des longueurs égales, leur centre commun de gravité demeurera immobile.

Démonstration. Concevons que, dans une situation quelconque de ces masses, on décompose chacune d'elles en deux autres placées aux extrémités du côté sur la direction duquel elle se trouve située ; le système se trouvera ainsi transformé en un système de masses en même nombre, et de même valeur totale, appliquées aux sommets du polygone ; et tout consiste à faire voir qu'en quelque situation des masses primitives que l'on opère cette transformation, les nouvelles masses placées aux sommets du polygone seront toujours les mêmes.



Soient A, B, C, trois sommets consécutifs quelconques du polygone ; soient, pour une époque quelconque, A', B' les situations simultanées de deux masses sur les directions respectives AB, BC ; et soient, pour une autre époque A'', B'', les situations de ces mêmes masses sur les mêmes directions.

1.° Si nous supposons d'abord ces masses égales, en désignant l'une d'elles par P; si l'on décompose tour à tour celle qui est placée en A' en deux autres placées en A et B, et celle qui est placée en B′ en deux autres placées en B et C, les deux masses placées en B en vertu de cette double décomposition auront respectivement pour expression

$$P.\frac{AA'}{AB}\,, \qquad P.\frac{B'C}{BC}\,,$$

et pourront conséquemment être remplacées par la masse unique

$$P\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right),$$

appliquée au même point B. Si, lorsque ces deux masses seront parvenues en A″ et B″, on opère une semblable décomposition, la masse unique appliquée en B aura pour expression

$$P\left(\frac{AA''}{AB}+\frac{B''C}{BC}\right),$$

c'est-à-dire,

$$P\left\{\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right)+\left(\frac{A'A''}{AB}-\frac{B'B''}{BC}\right)\right\};$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{A'A''}{AB}=\frac{B'B''}{BC}\,;$$

donc cette masse aura simplement pour expression

$$P\left(\frac{AA'}{AB}+\frac{B'C}{BC}\right);$$

c'est-à-dire qu'elle sera la même que dans le premier cas, ce qui démontre le premier des deux théorèmes énoncés.

2.° Si nous supposons, en second lieu, les masses inégales, en les représentant respectivement par P et Q, la masse unique appliquée en B sera, en vertu de la première décomposition

$$P,\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC}\,;$$

et, en vertu de la seconde,

$$P.\frac{AA''}{AB}+Q.\frac{B''C}{BC}\;.$$

Cette dernière expression revient à

$$P.\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC}+P.\frac{A'A''}{AB}-Q.\frac{B'B''}{BC}\;;$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{P}{Q}=\frac{AB}{BC}\,,\quad \text{et} \quad A'A''=B'B''\,;$$

donc

$$\frac{P.A'A''}{Q.B'B''}=\frac{AB}{BC}\,,$$

ou bien

$$P.\frac{A'A''}{AB}=Q.\frac{B'B''}{BC}\,,$$

donc, à la seconde époque, la masse appliquée en B aura simplement pour expression

$$P.\frac{AA'}{AB}+Q.\frac{B'C}{BC}\,,$$

c'est-à-dire qu'elle sera encore la même qu'à la première époque, ce qui démontre le dernier des deux théorèmes énoncés.