ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VECTEN

Géométrie élémentaire. Démonstration d'une propriété du quadrilatère complet

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 146-149

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__146_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'une propriété du quadrilatère complet ;

Par M. Vecten, licencié ès sciences,

Théorème. Si, par les sommets du triangle formé par la rencontre deux à deux des trois diagonales d'un quadrilatère complet, on mène des parallèles aux côtés respectivement opposés, ces parallèles formeront un nouveau triangle circonscrit au premier, dont chaque côté aura quatre intersections avec les côtés du quadrilatère dont il s'agit, ce qui fera douze intersections en tout.

Or, il arrivera que ces douze points, déjà distribués trois à trois sur les quatre côtés du quadrilatère proposé seront aussi distribués trois à trois sur les quatre côtés d'un autre quadrilatère différent de celui-là.

Ceux de ces douze points qui se trouveront de nouveau en ligne droite trois à trois seront ceux où les côtés du triangle formé par trois quelconques des côtés du quadrilatère proposé seront coupés par les parallèles aux trois côtés du triangle des diagonales de ce même quadrilatère.

Démonstration. Soient AEC, BCD, EFD, AFB (fig. 3) les quatre côtés d'un quadrilatère complet, ayant pour ses trois diagonales AD, BE, CF, formant par leur rencontre le triangle GHK. Soit circonscrit à ce triangle le triangle PQR dont les côtés soient respectivement parallèles aux siens ; ces côtés, par leur rencontre avec ceux du quadrilatère, détermineront douze points ; et il s'agit de démontrer que ces douze points, déjà distribués trois à trois sur les quatre côtés du quadrilatère proposé, le seront aussi trois à trois sur les quatre côtés d'un nouveau quadrilatère différent de celui-là.

Pour bien faire comprendre quels sont ceux de ces douze points que nous devons démontrer être en ligne droite, remarquons qu'en prenant trois à trois les quatre côtés de notre quadrilatère, on obtient quatre triangles ABC, CDE, BDF, AEF, tous inscrits au triangle GHK ; en prenant le mot inscrit dans le sens le plus large ; c'est-à-dire, tous tels que les trois sommets se trouvent situés sur les directions de ses côtés. Or, pour chaque triangle, les trois points qu'il faut démontrer être en ligne droite sont ceux où ses côtés sont coupés par ceux des côtés du triangle PQR qui se trouvent parallèles à ceux du triangle GHK qui contiennent les sommets opposés. Ainsi, en particulier, pour le triangle ABC, par exemple, les points en ligne droite seront

Le point a, intersection de BC, opposé à A, situé sur HK, avec sa parallèle QR,

Le point b, intersection de CA, opposé à B, situé sur KG, avec sa parallèle RP,

Le point c, intersection de AB, opposé à C, situé sur GH, avec sa parallèle PQ;

et il nous suffira même de démontrer la proposition pour ces trois points.

Pour cela, rappelons d'abord que, dans tout quadrilatère complet, chacune des trois diagonales est coupée par les deux autres en parties proportionnelles, ce qui donne

$$\frac{AH}{AK}=\frac{DH}{DK}, \quad \frac{BK}{BG}=\frac{EK}{EG}, \quad \frac{CG}{CH}=\frac{FG}{FH};$$

mais, si l'on mène les droites PA, QB, RC, coupant respectivement QR, RP, PQ en T, U, V, à cause des parallèles, on aura

$$\frac{AH}{AK}=\frac{TR}{TQ}, \qquad \frac{BK}{BG}=\frac{UP}{UR}, \qquad \frac{CG}{CH}=\frac{VQ}{VP};$$

donc, en comparant

$$\frac{DH}{DK}=\frac{TR}{TQ}, \qquad \frac{EK}{EG}=\frac{UP}{UR}, \qquad \frac{FG}{FH}=\frac{VQ}{VP};$$

et, par suite,

$$\frac{DH.EK.FG}{DK.EG.FH}=\frac{TR.UP.VQ}{TQ.UR.VP};$$

mais, en considérant la droite DFE comme transversale du triangle GHK, on voit que le premier membre de cette dernière équation doit être égal à l'unité ; donc son second membre est aussi égal à l'unité, d'où l'on conclut, par les théories connues, que les trois droites PA, QB, RC doivent concourir en un même point L, et que conséquemment les trois intersections de QR et BC, RP et CA, PQ et AB, doivent appartenir à une même ligne droite.

Corollaire. Il résulte de ce qui précède que, si l'on joint le sommet P du triangle PQR opposé à QR parallèle à la diagonale AD, aux deux extrémités A et D de cette diagonale, par les droites PA et PD, ces droites contiendront les deux extrémités A′, D′ de la diagonale correspondante du nouveau quadrilatère complet sur lequel nos douze points se trouvent distribués. Il en sera de même des droites menées des sommets Q et R aux deux extrémités des deux autres diagonales du quadrilatère primitif, comme on le voit dans la figure.

En effet, dans les deux triangles *eb′d* et *fc′d′*, les droites *ef*, *b′c′*, *dd′*, qui joignent les sommets deux à deux, concourent, par ce qui précède, en un même point *a′*, d'où il suit que les points P, A, A′ d'intersection des directions des côtés respectivement opposés à ces sommets doivent appartenir à une même ligne droite; et on en démontrerait autant pour les autres points de la figure qui se trouvent dans les mêmes circonstances.

Remarque. Nous avons démontré plus haut que les droites PA, QB, RC concourent en un même point L, et nous aurions démontré de la même manière que les droites PA, QE, RF concourent en un même point O; d'où il suit que la droite PA contient les deux points O et L; mais il résulte du corollaire qui vient d'être démontré que cette droite contient aussi le point A′; donc les cinq points A, A′, P, O, L appartiennent à une même ligne droite; et on en démontrerait autant de chacun des cinq autres systèmes de cinq points placés, dans la figure, dans les mêmes circonstances que ces cinq là.