

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

QUERRET

**Algèbre élémentaire. Sur la sommation des termes du développement des puissances d'un binôme, pour faire suite aux articles insérés à la page 359 du tome XII.e et à la page 163 du tome XIII.e des Annales**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 15 (1824-1825), p. 189-194

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1824-1825\\_\\_15\\_\\_189\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__189_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1824-1825, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

*Sur la sommation des termes du développement des puissances d'un binôme, pour faire suite aux articles insérés à la page 359 du tome XII.<sup>e</sup> et à la page 163 du tome XIII.<sup>e</sup> des Annales ;*

Par M. QUERRET, ancien chef d'institution.

REPRÉSENTONS par  $M_i$  le coefficient numérique du terme affecté de  $a^i x^{m-i}$ , dans le développement de  $(x+a)^m$ ; et soit la suite

$$M_1 a, M_2 a^2, M_3 a^3, M_4 a^4, \dots, M_r a^r, \dots; \quad (\alpha)$$

$r$  désignant le rang du terme  $M_r a^r$ ; et appelons cette suite  $(\alpha)$ .

Soit formée une seconde suite  $(\beta)$  dont le premier terme soit le premier terme de  $(\alpha)$  augmenté de  $b$ ; dont le second terme soit le second terme de  $(\alpha)$  augmenté du premier terme de  $(\beta)$  multiplié par  $b$ ; dont le troisième terme soit le troisième terme de  $(\alpha)$  augmenté du second terme de  $(\beta)$  multiplié par  $b$ , et ainsi de suite; en disposant dans une même colonne toutes les parties d'un même terme de cette deuxième suite, et en disposant ces termes de gauche à droite, suivant leur rang, elle sera

$$\left. \begin{array}{l}
 M_1 a \left| \begin{array}{l} M_2 a^2 \\ + M_1 a b \\ + b^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} M_3 a^3 \\ + M_2 a^2 b \\ + M_1 a b^2 \\ + b^3 \end{array} \left| \begin{array}{l} M_4 a^4 \\ + M_3 a^3 b \\ + M_2 a^2 b^2 \\ + M_1 a b^3 \\ + b^4 \end{array} \left| \begin{array}{l} \dots M_r a^r \\ \dots + M_{r-1} a^{r-1} b \\ \dots + M_{r-2} a^{r-2} b^2 \\ \dots + M_{r-3} a^{r-3} b^3 \\ \dots + M_{r-4} a^{r-4} b^4 \\ \dots + \dots \\ \dots + \dots b^r \dots \end{array} \right. \right\} (\beta)
 \end{array}$$

Nous appellerons cette suite la *somme première* de  $(\alpha)$ ; en désignant ses termes consécutifs par  $\Sigma(1, 1)$ ,  $\Sigma(1, 2)$ ,  $\Sigma(1, 3)$ , ...,  $\Sigma(1, r)$ , ...

Si on opère sur la série  $(\beta)$ , pour trouver une troisième série  $(\gamma)$  comme on avait opéré sur  $(\alpha)$  pour trouver  $(\beta)$ , on aura

$$\left. \begin{array}{l}
 M_1 a \left| \begin{array}{l} M_2 a^2 \\ + 2b \\ + 3b^2 \\ + 4b^3 \\ \dots \\ + (r+1)b^r \dots \end{array} \right| \begin{array}{l} M_3 a^3 \\ + 2M_2 a^2 b \\ + 3M_1 a b^2 \\ + 4M_1 a b^3 \\ \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} M_4 a^4 \\ + 2M_3 a^3 b \\ + 3M_2 a^2 b^2 \\ + 4M_1 a b^3 \\ + 4b^4 \dots \\ + 5M_{r-4} a^{r-4} b^4 \\ \dots \\ + (r+1)b^r \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} \dots M_r a^r \\ \dots + 2M_{r-1} a^{r-1} b \\ \dots + 3M_{r-2} a^{r-2} b^2 \\ \dots + 4M_{r-3} a^{r-3} b^3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \right\} (\gamma)
 \end{array}$$

Nous appellerons indistinctement cette nouvelle suite la *somme première* de  $(\beta)$  ou la *somme seconde* de  $(\alpha)$ , et nous représen-

terons ses termes consécutifs par  $\Sigma(2, 1)$ ,  $\Sigma(2, 2)$ ,  $\Sigma(2, 3)$ , ....  $\Sigma(2, r)$ .....

En opérant sur ( $\gamma$ ), comme sur les précédentes, nous formerons une suite ( $\gamma$ ) telle qu'on la voit ici

$$\left. \begin{array}{l}
 M_1 a \quad \left| \quad M_2 a^2 \quad \left| \quad M_3 a^3 \quad \left| \quad M_4 a^4 \dots\dots\dots M_r a^r \dots\dots\dots \right. \right. \\
 + 3b \left| + 3M_1 ab \left| + 3M_2 a^2 b \left| + 3M_3 a^3 b \dots\dots + 3M_{r-1} a^{r-1} b \dots\dots \right. \right. \\
 \quad \quad \quad \left| + 6 b^2 \left| + 6M_1 ab^2 \left| + 6M_2 a^2 b^2 \dots\dots + 6M_{r-2} a^{r-2} b^2 \dots\dots \right. \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \left| + 10 b^3 \left| + 10M_1 ab^3 \dots\dots + 10M_{r-3} a^{r-3} b^3 \dots\dots \right. \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| + 15 b^4 \dots\dots\dots + 15M_{r-4} a^{r-4} b^4 \dots\dots \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| + \dots\dots\dots \right. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| + \frac{(r+1)(r+2)}{2} b^r \dots\dots \right.
 \end{array} \right\} (\delta)$$

Cette suite sera pareillement la *somme première* de ( $\gamma$ ) ou la *somme seconde* de ( $\beta$ ) ou la *somme troisième* de ( $\alpha$ ), et nous représenterons ses termes consécutifs par  $\Sigma(3, 1)$ ,  $\Sigma(3, 2)$ ,  $\Sigma(3, 3)$ , ....  $\Sigma(3, r)$ .....

On peut, par le même procédé, former tant d'autres suites ( $\epsilon$ ), ( $\zeta$ ), ( $\eta$ ), ..... qu'on voudra, lesquelles seront dites les *sommes quatrième, cinquième, sixième, ....* de la suite ( $\alpha$ ); et il résulte des lois de leur formation,

- 1.° Que, dans la *somme première* de ( $\alpha$ ), les coefficients sont constans et égaux à l'unité;
- 2.° Que, dans la *somme seconde*, les coefficients sont les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, ....;
- 3.° Que, dans la *somme troisième*, les coefficients sont les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, .....

4.° Que, dans la *somme quatrième*, les coefficients sont la somme des nombres tétraèdres 1, 4, 10, 20, ...;

Et ainsi de suite.

De sorte que généralement, dans la *somme n.<sup>m<sup>e</sup></sup>*, les coefficients sont les nombres figurés du *n.<sup>m<sup>e</sup></sup>* ordre.

Si donc nous désignons, en général, par  $\varphi(p, q)$  le  $q.<sup>m<sup>e</sup></sup>$  nombre figuré du  $p.<sup>m<sup>e</sup></sup>$  ordre, et par  $\Sigma(n, r)$  le  $r.<sup>m<sup>e</sup></sup>$  terme de la somme  $n.<sup>m<sup>e</sup></sup>$  de (x), nous aurons

$$\Sigma(n, r) = M_r a^r + \varphi(n, 2) M_{r-1} a^{r-1} b + \varphi(n, 3) M_{r-2} a^{r-2} b^2 + \dots + \varphi(n, r+1) b^r. \quad (X)$$

Le terme général de cette série est  $\varphi(n, i+1) M_{r-i} a^{r-i} b^i$ .

Cela posé, on sait que

$$M_r = \frac{m-r+1}{r} M_{r-1}, \quad \text{d'où} \quad M_{r-1} = \frac{r}{m-r+1} M_r;$$

de là on tire, en changeant continuellement  $r$  en  $r-1$

$$M_{r-1} = \frac{r}{m-r+1} M_r,$$

$$M_{r-2} = \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} M_r,$$

$$M_{r-3} = \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} \cdot \frac{r-2}{m-r+3} M_r,$$

.....

$$M_{r-i} = \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} \cdot \frac{r-2}{m-r+3} \dots \frac{r-i+1}{m-r+i} M_r;$$

Par la substitution de ces valeurs, la série (X) deviendra

$$\begin{aligned} \Sigma(n, r) = M_r \left\{ a^r + \frac{r}{m-r+1} \varphi(n, 2) a^{r-1} b + \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} \varphi(n, 3) a^{r-2} b^2 \right. \\ + \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} \cdot \frac{r-2}{m-r+3} \varphi(n, 4) a^{r-3} b^3 + \dots \\ \left. + \frac{r}{m-r+1} \cdot \frac{r-1}{m-r+2} \cdot \frac{r-2}{m-r+3} \dots \frac{r-i+1}{m-r+i} \varphi(n, i+1) a^{r-i} b^i + \dots + \frac{\varphi(n, r+1)}{M_r} b^r \right\}. \quad (Y) \end{aligned}$$

Mais, à cause de la relation connue  $\varphi(p, q) = \varphi(q, p)$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(m-r+1, 2) = \varphi(2, m-r+1) = \varphi(m-r+1, 2), \\ (m-r+1)(m-r+2) = 1.2\varphi(3, m-r+1) = 1.2\varphi(m-r+1, 3), \\ (m-r+1)(m-r+2)(m-r+3) = 1.2.3\varphi(4, m-r+1) = 1.2.3\varphi(m-r+1, 4), \\ \dots \\ (m-r+1)(m-r+2)\dots(m-r+i) = 1.2\dots i\varphi(i+1, m-r+1) = 1.2\dots i\varphi(m-r+1, i+1); \end{aligned}$$

on a de plus

$$M_r = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \dots \frac{m-r+1}{r} = \varphi(r+1, m-r+1) = \varphi(m-r+1, r+1)$$

Au moyen de ces valeurs, la série (Y) deviendra

$$\begin{aligned} \Sigma(n, r) = M_r \left\{ a^r + \frac{1}{r} \frac{\varphi(n, n)}{\varphi(m-r+1, 2)} a^{r-1} b + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{\varphi(n, 3)}{\varphi(m-r+1, 3)} a^{r-2} b^2 + \right. \\ + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{\varphi(n, 4)}{\varphi(m-r+1, 4)} a^{r-3} b^3 + \dots \\ \left. + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \dots \frac{r-i+1}{i} \frac{\varphi(n, i+1)}{\varphi(m-r+1, i+1)} a^{r-i} b^i + \dots + \frac{\varphi(n, r+1)}{\varphi(m-r+1, r+1)} b^r \right\}. \quad (Z) \end{aligned}$$

194 PUISSANCES DES POLYNOMES.

Telle est l'expression générale d'un terme d'un rang quelconque dans une somme quelconque.

Si présentement on suppose  $n = m - r + 1$ , la série (Z) deviendra

$$\Sigma(m-r+1, r) = M_r \left\{ a^r + \frac{r}{1} a^{r-1} b + \frac{r}{1} \frac{r-2}{2} a^{r-2} b^2 + \dots + \frac{r}{1} \frac{r-1}{2} \dots \frac{r-i+1}{i} a^{r-i} b^i + \dots + b^r \right\}$$

c'est-à-dire,

$$\Sigma(m-r+1, r) = M_r (a+b)^r ;$$

de là on conclura

$$(a+b+c)^m = \Sigma(1, m) + \Sigma(2, m-1)c + \Sigma(3, m-2)c^2 + \dots + \Sigma(i+1, m-i)c^i + \dots + c^m ;$$

ce qui démontre généralement les équations posées tome XIII, (pag. 164 et suiv.), sur lesquelles est fondée la méthode que nous avons développée en cet endroit pour l'extraction des racines.

---