ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 76 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 197-199

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__197_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie énoncés à la page 76 du présent volume.

PROBLÈME. *A quelle courbe sont tangentes les cordes d'une section conique qui a un centre, hypoténuses d'une suite de triangles rectangles ayant constamment le sommet de l'angle droit au centre de la courbe ?*

Solution de M. Querret.

Supposons que la courbe soit une ellipse dont C soit le centre. Soit MN une des hypothénuses dont il s'agit. Du centre C à son milieu O soit menée une droite rencontrant la courbe en un point T par lequel soit menée une tangente à cette courbe. Du centre C soit abaissée sur cette tangente la perpendiculaire CG coupant en H sa parallèle MN. Soit enfin PQ le diamètre parallèle à MN, conjugué de celui qui passe par T ; à cause de l'angle droit MCN, on aura CO=OM=ON.

Cela posé, à cause des parallèles, on aura

$$\mathrm{CT}:\mathrm{CO}::\mathrm{CG}:\mathrm{CH}=\frac{\mathrm{CO.CG}}{\mathrm{CT}}=\frac{\mathrm{MO.CG}}{\mathrm{CT}}.$$

Mais, par la propriété de l'ellipse, on a

$$\overline{\mathrm{MO}}^2=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CT}}^2}(\overline{\mathrm{CT}}^2-\overline{\mathrm{CO}}^2)=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CT}}^2}(\overline{\mathrm{CT}}^2-\overline{\mathrm{MO}}^2)\ ;$$

d'où

$$\mathrm{MO}=\frac{\mathrm{CP.CT}}{\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{CT}}^2}}.$$

Mais, par une autre propriété de l'ellipse, si l'on représente par a et b ses deux demi-diamètres principaux, on aura

$$\mathrm{CP.CG}=ab\ , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{CP.CT}=\frac{ab.\mathrm{CT}}{\mathrm{CG}}\ ,$$

et

$$\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{CT}}^2=a^2+b^2\ ;$$

d'où

$$\mathrm{MO}=\frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CG}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En substituant donc cette valeur de MO dans celle de CH, elle deviendra simplement

$$\mathrm{CH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,$$

quantité constante, de sorte que la courbe cherchée est un cercle concentrique à l'ellipse dont il s'agit, et ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée de son centre sur la corde qui joint deux sommets consécutifs quelconques (*).

Pour passer de là à l'hyperbole sans faire de nouveaux calculs, a étant le demi-axe transverse, il suffit de changer b en $b\sqrt{-1}$ ce qui donne, pour le rayon du cercle,

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\,;$$

ce qui prouve qu'alors le cercle n'est possible qu'autant que l'axe transverse est le plus petit des deux.

(*) Quelqu'un nous a assuré que cette proposition se trouvait démontrée dans l'ouvrage de M. Poncelet; mais nous n'avons pu découvrir en quel endroit. §491

J. D. G.