ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Analise transcendante. Note sur le mémoire de M. Vernier, inséré à la page 165 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 360-363
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__360_1>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur le Mémoire de M. Vernier, inséré à la page 165 du présent volume,

Par M. Gergonne.

Quelqu'un vient de nous faire observer que plusieurs des résultats obtenus par M. Vernier, dans son Mémoire, inséré à la page 165 du présent volume, se trouvent implicitement contenus dans des résultats plus généraux, antérieurement publiés par M. Cauchy. L'auteur de cette observation est loin de prétendre, en la faisant, déprécier le travail de M. Vernier; il veut seulement 1.° montrer toute la fécondité des résultats obtenus par M. Cauchy; 2.° offrir à

M. Vernier une sorte de vérification de ses formules qui ne pourra que lui inspirer un nouveau degré de confiance dans les résultats de ses recherches.

Par exemple, dans le *Bulletin des sciences* pour 1822 (pag. 169), M. Cauchy a donné la formule

$$\int_0^{\varpi}\frac{f(\text{Cos}.p+\sqrt{-1}\text{Sin}.p)}{F(\text{Cos}.p+\sqrt{-1}\text{Sin}.p)}dp=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\frac{f(r)}{rF(r)}dr+\text{etc.},$$

où les termes qui suivent le premier, dans le second membre, ne doivent point être employés dans le cas particulier que M. Vernier considère. Or, si l'on pose, en général, $\frac{f(u)}{uF(u)}=\varphi(u)$, d'où $\frac{f(u)}{F(u)}=u\varphi(u)$, et qu'on ne garde que le premier terme du second membre, il viendra

$$\int_0^{\varpi}(\text{Cos}.p+\sqrt{-1}\text{Sin}.p)\varphi(\text{Cos}.p+\sqrt{-1}\text{Sin}.p)\text{d}p=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\text{d}r;$$

ou bien

$$\int_0^{\varpi}e^{p\sqrt{-1}}.\varphi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)\text{d}p=\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\text{d}r\ ;$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(r)\text{d}r=-\sqrt{-1}\int_0^{\varpi}e^{p\sqrt{-1}}.\varphi\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)\text{d}p\ ;$$

qui est exactement, aux notations près, la formule (P), donnée par M. Vernier, à la page 180.

En second lieu ; dans le XIX.e cahier du *Journal de l'École polytechnique* (pag. 575) , si , dans la formule (7) de M. Cauchy , on fait $v'=0$, $v''=\varpi$, $u'=1$, $u''=0$, elle devient

$$\int_{+1}^{0}\left\{e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}\left(ue^{\varpi\sqrt{-1}}\right)-\mathrm{f}(u)\right\}\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}\left\{\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\right\}e^{v\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}v\ ,$$

qui se réduit à

$$\int_{0}^{1}\left\{\mathrm{f}(-u)+\mathrm{f}(u)\right\}\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}\left\{\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\right\}e^{v\sqrt{-1}}\mathrm{d}v\ ;$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u=-\sqrt{-1}\int_{0}^{\varpi}e^{v\sqrt{-1}}\mathrm{f}\left(e^{v\sqrt{-1}}\right)\mathrm{d}v\ ;$$

on néglige ici Δ, à cause de l'hypothèse de M. Vernier ; et l'on retombe encore, comme on voit , aux notations près sur sa formule (P)

Maintenant, si, dans la formule (3) du même mémoire (pag. 574) , on fait $U+V\sqrt{-1}=u.e^{-v+v\sqrt{-1}}$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}(U+V\sqrt{-1})}{\mathrm{d}u}=e^{-v+v\sqrt{-1}}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}(U+V\sqrt{-1})}{\mathrm{d}v}=(-1+\sqrt{-1})ue^{-v+v\sqrt{-1}}\ ;$$

ce qui change les fonctions χ et ψ de cette formule en deux autres qui, substituées dans la formule (5) de ce même mémoire , donnent

$$\int_{u'}^{u''}\left\{\frac{e^{v''\sqrt{-1}}}{e^{v''}}\,\mathrm{f}\left(\frac{ue^{v''\sqrt{-1}}}{e^{v''}}\right)-\frac{e^{v'\sqrt{-1}}}{e^{v'}}\,\mathrm{f}\left(\frac{ue^{v'\sqrt{-1}}}{e^{v'}}\right)\right\}\mathrm{d}u$$

$$=(-1+\sqrt{-1})\int_{v'}^{v''}\left\{\frac{u''e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{u''e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)-\frac{u'e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{u'e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\right\}\mathrm{d}v.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $v'=0$, $v''=\infty$, $u'=0$, $u''=1$, on aura

$$\int_{0}^{1}-\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u=(-1+\sqrt{-1})\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\right\}\mathrm{d}v\ ;$$

d'où

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\,\mathrm{f}\left(\frac{e^{v\sqrt{-1}}}{e^{v}}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u+\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_{0}^{1}\mathrm{f}(u)\mathrm{d}u.$$

C'est aux notations près la formule (Q) de M. Vernier, (pag. 185).