

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

L. C. BOUVIER

**Analyse transcendante. Nouvelle méthode pour l'intégration de  
l'équation linéaire du premier ordre à deux variables**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 15 (1824-1825), p. 41-44

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1824-1825\\_\\_15\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__41_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1824-1825, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## ANALISE TRANSCENDANTE.

*Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation linéaire  
du premier ordre à deux variables ;*

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier du génie, ancien élève  
de l'école polytechnique.

---

ON se tromperait étrangement si l'on croyait avoir tout fait dans l'analyse, lorsqu'on a trouvé une méthode propre à résoudre chacune des questions qui dépendent de ses procédés. Outre qu'en effet les divers chemins qui conduisent au même but peuvent fort bien n'être pas tous également aisés à parcourir ; il arrive souvent que, tandis que certaines méthodes sont exclusivement propres à l'objet particulier pour lequel elles ont été imaginées, d'autres, au contraire, semblent ouvrir devant elles une voie nouvelle, et être de nature à s'étendre à un grand nombre de recherches analogues.

Ces réflexions nous serviront d'excuse, si nous revenons ici un moment sur un sujet qui semble épuisé depuis long-temps, en indiquant, pour parvenir à l'intégration de l'équation linéaire du premier ordre entre deux variables, un procédé tout-à-fait nouveau, et qui nous paraît susceptible d'être étendu au-delà de cette application particulière.

Soit l'équation

*Tom. XV, n.° II, 1.<sup>er</sup> août 1824.*

$$\frac{dy}{dx} = P_1 y + Q_1, \quad (1)$$

— dans laquelle  $P_1$  et  $Q_1$  sont supposés des fonctions quelconques de  $x$  sans  $y$ . En la différentiant, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_1 \frac{dy}{dx} + \frac{dP_1}{dx} y + \frac{dQ_1}{dx};$$

ou, en mettant pour  $\frac{dy}{dx}$  sa valeur donnée par la proposée,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left( P_1^2 + \frac{dP_1}{dx} \right) y + \left( P_1 Q_1 + \frac{dQ_1}{dx} \right);$$

de sorte qu'en posant

$$P_1^2 + \frac{dP_1}{dx} = P_2, \quad P_1 Q_1 + \frac{dQ_1}{dx} = Q_2;$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_2 y + Q_2,$$

où  $P_2$  et  $Q_2$  seront encore, comme dans (1), des fonctions de  $x$  sans  $y$ .

Il est clair, d'après cela, que, si l'on pose,

$$P_2^2 + \frac{dP_2}{dx} = P_3, \quad P_2 Q_2 + \frac{dQ_2}{dx} = Q_3,$$

on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P_3 y + Q_3,$$

où  $P_3$  et  $Q_3$  seront toujours des fonctions de  $x$  sans  $y$ ; de manière qu'en continuant ainsi, on aura, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = P_n y + Q_n, \quad (2)$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  seront encore des fonctions de  $x$  sans  $y$ , et  $n$  un nombre entier positif quelconque.

Si, dans cette dernière équation, on suppose  $n=0$ , elle deviendra

$$\frac{d^0 y}{dx^0} \quad \text{ou} \quad y = P_0 y + Q_0,$$

d'où

$$y = \frac{Q_0}{1 - P_0}; \quad (3)$$

d'où l'on voit que l'intégration de la proposée se réduit finalement à déterminer les deux fonctions  $P_0$  et  $Q_0$ . Or, c'est là une chose très-facile, ainsi qu'on va le voir.

En différentiant l'équation (2), on a

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = P_n \frac{dy}{dx} + \frac{dP_n}{dx} y + \frac{dQ_n}{dx};$$

ou, en mettant dans le second membre pour  $\frac{dy}{dx}$  sa valeur donnée par l'équation (1),

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \left( P_1 P_n + \frac{dP_n}{dx} \right) y + \left( Q_1 P_n + \frac{dQ_n}{dx} \right).$$

Faisant, dans cette dernière,  $n=0$ , elle deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \left( P_1 P_0 + \frac{dP_0}{dx} \right) y + \left( Q_1 P_0 + \frac{dQ_0}{dx} \right).$$

Celle-ci devant être identique avec l'équation (1), on aura

44 ÉQUATION LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE.

$$P_1 P_0 + \frac{dP_0}{dx} = P_1, \quad (4) \quad Q_1 P_0 + \frac{dQ_0}{dx} = Q_1. \quad (5)$$

La première de ces équations donne

$$\frac{dP_0}{1-P_0} = P_1 dx,$$

d'où en intégrant

$$\text{Log.} \frac{1-P_0}{C} = -\int P_1 dx,$$

$C$  étant la constante ; c'est-à-dire ,

$$1-P_0 = C e^{-\int P_1 dx}. \quad (6)$$

On tire ensuite de l'autre

$$dQ_0 = Q_1(1-P_0)dx = C Q_1 dx e^{-\int P_1 dx},$$

d'où , en intégrant ,

$$Q_0 = C \int e^{-\int P_1 dx} Q_1 dx,$$

substituant enfin les valeurs de  $Q_0$  et de  $1-P_0$  dans la formule (3) , on aura

$$y = \frac{\int e^{-\int P_1 dx} Q_1 dx}{e^{-\int P_1 dx}} = e^{\int P_1 dx} \int e^{-\int P_1 dx} Q_1 dx,$$

c'est la formule connue dans laquelle , comme l'on voit , il ne faut point ajouter de constante à l'intégrale  $\int P_1 dx$  , mais seulement à l'intégrale  $\int e^{-\int P_1 dx} Q_1 dx$ .