ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Trigonométrie. Discussion des formules qui donnent les sinus et cosinus de la moitié d'un angle en fonction soit du cosinus soit du sinus de cet angle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 56-62
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__56_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Discussion des formules qui donnent les sinus et cosinus de la moitié d'un angle en fonction soit du cosinus soit du sinus de cet angle ;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

On sait que, quel que soit un angle x, on a

$$2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x=1-\text{Cos.}x\,, \qquad 2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}x=1+\text{Cos.}x\,;$$

d'où on tire

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

Il sera facile de lever l'ambiguité qui résulte des doubles signes de ces formules au moyen des remarques suivantes :

1.° Si x est compris entre $4n\varpi$ et $(4n+1)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

2.° Si x est compris entre $(4n+1)\varpi$ et $(4n+2)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

3.° Si x est compris entre $(4n+2)\varpi$ et $(4n+3)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

4.° Enfin, si x est compris entre $(4n+3)\varpi$ et $(4n+4)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$ et $2(n+1)\varpi$, et conséquemment on devra avoir

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{Cos.}x)}\,, \qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\text{Cos.}x)}\,.$$

Mais, comme l'observe M. Legendre, dans sa trigonométrie, au lieu d'avoir le sinus et le cosinus de la moitié d'un angle en fonction du cosinus de cet angle, on peut désirer de les obtenir immédiatement en fonction de son sinus. On y parviendrait d'abord facilement en substituant dans les formules ci-dessus la valeur

$$\text{Cos.}x=\pm\sqrt{1-\text{Sin.}^2x}\,,$$

et discutant ensuite, comme ci-dessus, les signes du second radical qui doivent répondre à chaque cas; mais on doit éviter autant qu'on le peut dans les formules les radicaux superposés, attendu l'obligation qu'ils imposent d'extraire les premières racines avec beaucoup plus de chiffres décimaux qu'on n'en a besoin dans le résultat final; et ces radicaux superposés peuvent, dans la question qui nous occupe, être facilement évités.

On a en effet, quel que soit x,

$$\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}x=1\ ,$$

$$2\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\mathrm{Sin.}x\ .$$

Prenant tour à tour la somme et la différence de ces deux équations, on aura

$$(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x)^2=1+\mathrm{Sin.}x\ ,\quad (\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x)^2=1-\mathrm{Sin.}x\ ,$$

d'où on conclura

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\ ,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\ ;$$

équations qui donneront immédiatement, par addition et soustraction, les valeurs de $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}x$, dès qu'on aura levé l'ambiguité qui résulte des doubles signes de leurs seconds membres.

Et remarquons bien que, dans le cas actuel, la discussion de ces signes est d'une toute autre importance qu'elle ne l'était dans le cas précédent. Alors, en effet, en la négligeant, nous aurions du moins obtenu les valeurs absolues de $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x$ et de $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}x$, et nous n'aurions été exposés au plus qu'à une erreur de signe qui quelquefois n'est d'aucune importance, tandis qu'ici, où les valeurs de $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}x$ doivent se composer de deux termes radicaux, une méprise sur les signes de ces radicaux pourrait entraîner une erreur tant sur la valeur absolue que sur le signe de la quantité cherchée. Examinons donc quels doivent être les signes de ces radicaux dans les différens cas.

1.° Si x est compris entre $4n\varpi$ et $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{4}\varpi$; $\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x$ et $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}x$ seront donc tous deux positifs; mais on aura $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}x>\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}x$; d'où il suit qu'il faudra prendre

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\,,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\,.$$

2.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$; Sin $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ seront donc encore positifs ; mais, comme on aura alors Sin. $\frac{1}{2}x>$ Cos. $\frac{1}{2}x$, il faudra prendre

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\,,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\,.$$

3.° Si x est compris entre $4n\varpi+\varpi$ et $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ demeurera toujours positif ; mais Cos. $\frac{1}{2}x$ sera négatif et moindre que lui, abstraction faite de son signe ; on aura donc

$$\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\,,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\,.$$

4.° Si x se trouve compris entre $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $4n\varpi+2\varpi$, $\frac{1}{2}x$ sera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ sera encore positif et Cos. $\frac{1}{2}x$ négatif ; mais, comme ce dernier sera plus grand, abstraction faite de son signe, que le premier, il faudra prendre

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\,,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\,.$$

5.° Si x est compris entre $4n\varpi+2\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $4n\varpi+\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ seront alors tous deux négatifs ; mais, abstraction faite des signes, Sin. $\frac{1}{2}x$ sera le plus petit des deux ; de sorte qu'on aura

$$\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\mathrm{Sin.}x}\,,\quad \mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\mathrm{Sin.}x}\,.$$

6.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$ et $4n\varpi+3\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{5}{4}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ et Cos. $\frac{1}{2}x$ demeureront encore tous deux négatifs ; mais, abstraction faite des signes, ce sera alors Sin. $\frac{1}{2}x$ qui sera le plus grand ; on devra donc écrire

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

7.° Si x est compris entre $4n\varpi+3\varpi$ et $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$, $\frac{1}{2}\varpi$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $2n\varpi+\frac{7}{4}\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ demeurera donc toujours négatif ; mais Cos. $\frac{1}{2}x$ redeviendra positif, et sera le plus petit des deux, abstraction faite de son signe ; il faudra donc écrire

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}x-\text{Cos.}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

8.° Si enfin x est compris entre $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$ et $(4n+2)\varpi$, $\frac{1}{2}x$ se trouvera compris entre $2n\varpi+\frac{7}{4}\varpi$ et $(2n+1)\varpi$; Sin. $\frac{1}{2}x$ sera encore négatif et Cos. $\frac{1}{2}x$ positif ; mais, abstraction faite des signes, ce dernier deviendra le plus grand ; de sorte qu'on devra avoir

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,.$$

De toute cette discussion résultent, en résumé, les conséquences suivantes :

1.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{1}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,,$$

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,.$$

2.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{3}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,.$$

3.° Si x est compris entre $4n\varpi+\frac{5}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}x\tfrac{1}{2}-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,,$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,.$$

4.° Si enfin x est compris entre $4n\varpi+\frac{7}{2}\varpi$ et $4n\varpi+\frac{9}{2}\varpi$, on aura

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=+\sqrt{1+\text{Sin.}x}\,,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}x-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\,,$$

et par suite

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}-\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{1+\text{Sin.}x}+\sqrt{1-\text{Sin.}x}\right)\,.$$

M. Legendre donne uniquement ces dernières formules, et les donne comme générales; mais il suffit, pour s'assurer qu'elles ne le sont pas, d'y faire $x=\varpi$. Sa méprise paraît venir en partie de ce qu'au lieu de chercher directement ces formules, ainsi que nous venons de le faire, il s'est contenté de les vérifier par l'élévation au quarré, ce qui conduit à un résultat pareil à celui que donnerait le deuxième cas.

Nous ne disons rien du cas où l'angle x serait négatif, attendu que les relations entre les sinus et cosinus de deux angles qui ne diffèrent que par le signe sont assez connues.