QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de géométrie énoncé à la page 120 du XIII.e volume des Annales;

Par M. Gergonne.

Avant de résoudre le problème proposé, nous nous occuperons d'abord du suivant, qui est pour la géométrie plane ce qu'est l'autre pour la géométrie de l'espace.

PROBLÈME. Une des propriétés du cercle est que les tangentes aux extrémités de chacune de ses cordes font des angles égaux avec elle; mais cette propriété pourrait fort bien n'être pas exclusive au cercle. On propose donc d'examiner si elle ne conviendrait pas à d'autres courbes planes, et de donner, dans le cas de l'affirmative, l'équation générale de ces courbes ?

Ou, en d'autres termes,

PROBLÈME. Quelle est l'équation la plus générale des courbes planes dans lesquelles les tangentes aux deux extrémités de leurs cordes se coupent sur la perpendiculaire au milieu de ces cordes ?

Solution. Prenons respectivement pour axes des x et des y la tangente et la normale en un point quelconque de la courbe cherchée, lequel point sera conséquemment l'origine des coordonnées; et soit (x', y') un autre point quelconque de cette courbe. La corde qui joindra ces deux points aura pour équation

$$y=\frac{y'}{x'}x\ ;$$

la tangente à l'une de ses extrémités sera l'axe des x lui-même, et la tangente à son autre extrémité aura pour équation

$$y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}(x-x')\ . \qquad (1)$$

Quant à la perpendiculaire sur le milieu de la corde, son équation sera

$$y-\tfrac{1}{2}y'=-\frac{x'}{y'}(x-\tfrac{1}{2}x')\ ; \qquad (2)$$

et il faudra que cette tangente et cette perpendiculaire coupent l'axe des x au même point. Il faudra donc qu'en faisant $y=0$, dans les équations (1, 2), on en tire la même valeur pour x. Or, elles deviennent ainsi

$$y'\mathrm{d}x'+(x-x')\mathrm{d}y'=0\ ; \qquad y'^2-x'(2x-x')=0\ ;$$

éliminant donc x entre elles, et supprimant ensuite les accens, désormais superflus, on obtiendra pour l'équation différentielle des courbes cherchées

$$(x^2-y^2)\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x\ ,$$

ou bien

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}y=2y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\ ,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ ,$$

d'où

$$x^2+y^2=2Cy\ ,$$

équation commune à tous les cercles qui touchent l'axe des x à l'origine.

On peut donc définir indistinctement le cercle *une courbe telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes font des angles égaux avec elles*, ou *une courbe telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes se coupent sur les perpendiculaires à leurs milieux;* ce qui rentre à peu près dans ce qui a été démontré géométriquement (tom. XIV, pag. 316).

PROBLÈME. Quelle est l'équation la plus générale des surfaces courbes dans lesquelles les plans tangens aux deux extrémités de leurs cordes se coupent sur le plan perpendiculaire au milieu de ces cordes?

Solution. Prenons respectivement pour plan des xy et pour axe des z le plan tangent et la normale en un point quelconque de la surface cherchée, lequel point sera conséquemment l'origine des coordonnées rectangulaires; et soit (x', y', z') un autre point quelconque de cette surface. La corde qui joindra ces deux points aura pour ses équations

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \;;$$

le plan tangent à l'une de ses extrémités sera le plan des xy lui-même, et le plan tangent à son autre extrémité aura pour équation

$$z-z'=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}(y-y') \;, \qquad (1)$$

quant au plan perpendiculaire sur le milieu de la corde, son équation sera

$$z-\tfrac{1}{2}z'=-\frac{x'}{z'}(x-\tfrac{1}{2}x')-\frac{y'}{z'}(y-\tfrac{1}{2}y') \;; \qquad (2)$$

et il faudra que ce plan tangent et ce plan perpendiculaire coupent le plan des xy suivant la même droite. Il faudra donc qu'en faisant $z=0$, dans les équations (1, 2), on en tire des équations en x et y qui expriment la même droite. Or, ces équations sont

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y'-z' \,,$$

$$2x'x+2y'y=x'^2+y'^2+z'^2 \,.$$

On devra donc avoir

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}}{\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x'+\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y'-z'}=\frac{2x'}{x'^2+y'^2+z'^2} \,,$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}}{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}x'+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}y'-z'}=\frac{2y'}{x'^2+y'^2+z'^2}\ ;$$

c'est-à-dire, en chassant les dénominateurs et supprimant les accens désormais superflus

$$(y^2+z^2-x^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2xy\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-2xz\,,$$

$$(x^2+z^2-y^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-2xy\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2yz\ ;$$

équations d'où on tirera

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2xz}{x^2+y^2-z^2}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{2yz}{x^2+y^2-z^2}\ ;$$

puis donc qu'on a

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\ ,$$

l'équation différentielle totale de la surface cherchée sera

$$\mathrm{d}z=\frac{2z(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2-z^2}\,,$$

c'est-à-dire,

$$(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z=2z(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)\ .$$

ou encore

$$\frac{dz}{z}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\ ;$$

d'où, en intégrant,

$$x^2+y^2+z^2=2Cz\ ,$$

équation commune à toutes les sphères qui touchent le plan des xy à l'origine.

On peut donc définir la sphère *une surface telle que les tangentes aux extrémités de ses cordes se coupent sur les plans perpendiculaires à leurs milieux* ; ce qui rentre à peu près dans ce qui a été démontré géométriquement (tom. XIV, pag. 317).

PROBLÈME. Une des propriétés de la sphère est que les plans tangens aux extrémités de ses cordes font des angles égaux avec elles ; mais on conçoit que cette propriété pourrait fort bien n'être pas exclusive à la sphère. On propose donc d'examiner si elle ne conviendrait pas à d'autres surfaces courbes, et de donner, dans le cas de l'affirmative, l'équation générale de ces surfaces ? (*)

Solution. Tout étant supposé ici comme dans le précédent problème, il faudra exprimer que la corde fait des angles égaux tant avec le plan tangent qu'avec le plan des xy ; égalant donc entre eux les sinus de ces angles, nous aurons

$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{z'-x'\dfrac{dz'}{dx'}-y'\dfrac{dz'}{dy'}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)\left\{1+\left(\dfrac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\dfrac{dz'}{dy'}\right)^2\right\}}}\ ;$$

(*) C'est proprement là la question qui a été proposée.

ou en simplifiant, chassant les dénominateurs, quarrant et supprimant les accens désormais superflus

$$z^2\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}=\left(z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Telle est donc l'équation différentielle partielle commune à toutes les surfaces demandées ; équation qu'il s'agirait d'intégrer pour avoir la solution complète du problème.