STEIN
QUERRET

Questions résolues. Démonstration du dernier des théorèmes énoncés à la page 392 du XIV.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 97-100
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__97_0>

QUESTIONS RESOLUES.

Demonstration du dernier des théorèmes énoncés à la page 392 du XIV.e volume des Annales ;

Par M. Stein, professeur de mathématiques au gymnase de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique,

Et M. Querret, ancien chef d'institution.

THÉORÈME. *Soit un polygone plan quelconque, dont les sommets consécutifs soient* A, B, C,....... L, M, N ; *et soient respectivement* A′, B′, C′,...... L′, M′, N′ *les milieux des côtés consécutifs* AB, BC, CD,....... LM, MN, NA. *Soient en outre* d, e, f,..... l, m, n *les milieux respectifs des diagonales* BD, BE, BF,..... BL, BM, BN.

Par les points d, e, f,...... l, m, n, A′ *soient menées des parallèles à une droite fixe, de direction arbitraire. Soient menées ensuite* B′C′, *coupant la première de ces parallèles en* d′, *puis* D′d′, *coupant la seconde en* e′, *ensuite* E′e′, *coupant la troisième en* f′, *et ainsi du reste, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à mener* N′n′, *coupant en* a′ *la parallèle conduite par* A′. *Si alors, entre les parallèles à la droite fixe, conduites par* A *et* B, *prises pour directions de côtés opposés, on construit un parallélogramme, dont les deux autres côtés opposés, de direction d'ailleurs arbi-*

traire, passent par A' *et* a', *ce parallélogramme sera équivalent au polygone proposé* (*).

Démonstration. Pour rendre la démonstration de ce théorème plus intelligible, nous la renfermerons dans la résolution des deux problèmes suivans :

PROBLÈME I. Étant donné un pentagone composé d'un parallélogramme et d'un triangle qui ont un côté commun, transformer ce pentagone en un parallélogramme équivalent dont un côté soit un quelconque des deux autres côtés du triangle, et dont le côté adjacent soit dirigé suivant le côté du parallélogramme primitif adjacent à ce même côté du triangle ?

Solution. Soit le pentagone ηBEDθ (fig. 12) formé du parallélogramme B$\eta\theta$D et du triangle BED, ayant le côté BD commun, et proposons-nous de transformer ce pentagone en un parallélogramme dont BE soit un des côtés et dont un autre côté soit dirigé suivant Bη.

Pour cela, par le milieu D' du côté DE et le milieu d' du côté $\eta\theta$ du pentagone soit menée une droite concourant en e' avec la parallèle à Bη et Dθ menée par le milieu e du côté BE. Alors, en menant par e' une parallèle à BE, rencontrant respectivement Bη et la parallèle menée à cette droite par le point E en δ et ε, le parallélogramme B$\delta\varepsilon$E sera le parallélogramme demandé, équivalent au pentagone ηBEDθ.

Démonstration. Soit menée la droite $D'e$, terminée en α et β à la rencontre des prolongemens de ηB et θD. Par le point D' et par le milieu d de Bd soit menée une droite coupant Eε en μ, ee' en ζ et Bδ en γ; soit enfin menée dd', coupant $\alpha\beta$ en λ.

Parce que D' et e sont les milieux respectifs de ED et EB,

(*) Ce théorème est dû à M. Ch. Sturm.

J. D. G.

la droite $\alpha\beta$ est parallèle à BD, et par conséquent le quadrilatère $D\alpha\beta B$ est un parallélogramme. Ce parallélogramme est équivalent au triangle BED, puisqu'il a même base BD et une hauteur moitié de la sienne.

Parce que D' et d sont les milieux respectifs de DE et BD, la droite $D'\gamma$ est parallèle à EB, et par conséquent le quadrilatère $B\gamma\mu E$ est un parallélogramme. Ce parallélogramme est aussi équivalent au triangle BED, puisqu'il a même base BE et une hauteur moitié de la sienne.

Les deux parallélogrammes $D\alpha\beta B$ et $B\gamma\mu E$ se trouvant ainsi équivalens à un même triangle sont aussi équivalens entre eux, et la figure $\gamma\delta\varepsilon\mu$ est aussi un parallélogramme.

Les deux parallélogrammes $\gamma BE\mu$ et $\gamma\delta\varepsilon\mu$ étant compris entre les mêmes parallèles sont entre eux dans le rapport de leurs bases $E\mu$ et $\mu\varepsilon$, ou dans le rapport de $e\zeta$ à $\zeta e'$, ou encore, à cause des parallèles, dans le rapport de λd à dd'.

Les deux parallélogrammes $B\beta\alpha D$ et $B\eta\theta D$ étant compris entre les mêmes parallèles, sont entre eux dans le rapport de leurs bases αD et $D\theta$, ou, ce qui revient au même, dans le rapport de λd à dd'.

Donc, à cause du rapport commun de λd à dd', les deux parallélogrammes $\gamma BE\mu$ et $\gamma\delta\varepsilon\mu$ sont entre eux respectivement comme les deux parallélogrammes $B\beta\alpha D$ et $B\eta\theta D$; puis donc que $\gamma BE\mu$ et $B\beta\alpha D$ sont équivalens entre eux et au triangle BED, les deux parallélogrammes $\gamma\delta\varepsilon\mu$ et $B\eta\theta D$ doivent aussi être équivalens.

Donc le parallélogramme total $B\delta\varepsilon E$ doit être équivalent au parallélogramme total $\beta\eta\theta\alpha$; mais ce dernier est équivalent au pentagone proposé $\eta BED\theta$; donc le premier doit aussi lui être équivalent.

PROBLÈME II. Transformer un polygone rectiligne donné quelconque en un parallélogramme équivalent qui ait pour un de ses côtés un quelconque des côtés du polygone, et dont les deux côtés adjacens à celui-là soient parallèles à une droite donnée ?

Solution. Soient A, B, C, D, E,...... (fig. 13) les sommets consécutifs du polygone proposé, et supposons qu'il soit question de le transformer en un parallélogramme équivalent dont AB soit un des côtés et dont un autre côté se terminant en B soit parallèle à une droite donnée.

Soit menée la droite indéfinie $B\eta$, parallèle à la droite donnée. Joignons les milieux respectifs B′, C′ des côtés BC, CD par une droite se terminant en η à $B\eta$ et en θ à sa parallèle conduite par D; le parallélogramme $B\eta\theta D$ sera équivalent au triangle BCD. Représentons ce parallélogramme par P.

En lui ajoutant le triangle BED, on formera le pentagone $\eta BED\theta$ que l'on pourra (*Problème I*) transformer en un nouveau parallélogramme ayant BE pour un de ses côtés et un autre côté dirigé suivant $B\eta$; désignons ce nouveau parallélogramme par Q.

En lui ajoutant le triangle BFE, on formera un second pentagone que l'on pourra également (*Problème I*) transformer en un parallélogramme ayant BF pour un de ses côtés, et un autre dirigé suivant $B\eta$.

En continuant de la même manière, on sera finalement conduit à construire un parallélogramme équivalant au polygone proposé, ayant AB pour un de ses côtés, et un autre côté dirigé suivant $B\eta$, ainsi qu'il était requis.

Remarque. C'est à justifier cette construction que se réduit le théorème proposé, lequel se trouve ainsi démontré par ce qui précède.