QUERRET

Trigonométrie. Note sur le problème de la trisection de l'angle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 108-112
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__108_1>

TRIGONOMÉTRIE.

Note sur le problème de la trisection de l'angle;

Par M. QUERRET, professeur de Mathématiques transcendantes à la faculté des sciences de Montpellier.

ON sait qu'en désignant par α un angle quelconque, on a

$$\text{Sin}.3\alpha=3\text{Sin}.\alpha-4\text{Sin}^3\alpha\ ,$$

d'où, en posant, $\text{Sin}.3\alpha=m$ et $\text{Sin}.\alpha=x$

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}m=0 \; . \qquad (1)$$

On démontre ordinairement que cette équation a ses trois racines réelles, soit par la considération de la multiplicité des angles auxquels répond un même sinus, soit en faisant voir qu'elle tombe dans le cas irréductible.

Mais on peut aussi déduire immédiatement cette vérité de la forme même de l'équation qu'il s'agit de résoudre. Et d'abord, comme elle est d'un degré impair, elle doit avoir au moins une racine réelle.

En second lieu, parce que m est un nombre plus petit que l'unité, on doit avoir

$$1>\frac{3}{4}\mp\frac{1}{4}m \; ;$$

ce qui donne

$$1-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}m>0 \quad , \qquad -1+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}m<0 \; ,$$

or les premiers membres de ces inégalités ne sont autre chose que les résultats de la substitution de $+1$ et -1 à la place de x, dans le premier membre de l'équation (1); donc, soit que cette équation ait trois racines réelles soit qu'elle n'en ait qu'une seule, elle doit avoir une racine réelle comprise entre $+1$ et -1.

Or tout nombre abstrait compris entre $+1$ et -1 peut être considéré comme le sinus tabulaire d'un certain angle, d'où il suit que nous pouvons représenter une des racines de l'équation (1) par $\mathrm{Sin}.\,\alpha$, ce qui donnera la condition

$$\mathrm{Sin.}^3\alpha-\frac{3}{4}\,\mathrm{Sin.}\alpha+\frac{1}{4}m=0 \; . \qquad (2)$$

Or on peut prouver que, l'angle α étant pris de manière à satisfaire à cette condition, $\mathrm{Sin.}\alpha$, $\mathrm{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)$ et $\mathrm{Sin.}(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)$ seront les trois racines de la proposée, ou, en d'autres termes, que l'équation (1) sera identique avec

$$\{x-\text{Sin}.\alpha\}\{x-\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\}\{x-\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)\}=0 \ . \qquad (3)$$

ou, en multipliant, avec

$$\left.\begin{array}{r} x^3-\text{Sin}.\alpha \\ -\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha) \\ -\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha) \end{array}\right| \left.\begin{array}{lr} x^2+ & \text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha) \\ + & \text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha) \\ & +\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha) \end{array}\right| x-\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=0 \ ,$$

équation dans laquelle il s'agit présentement d'exécuter les réductions.

Or, en vertu du théorème $\text{Sin}.p+\text{Sin}.q=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(p+q)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(p-q)$ on a d'abord

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)+\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=2\text{Sin}.(\varpi+\alpha)\text{Cos}.\tfrac{1}{3}\varpi=-\text{Sin}.\alpha \ ,$$

au moyen de quoi le coefficient de x^2 s'anéantit. On conclut ensuite de là

$$\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)+\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.^2\alpha \ ;$$

d'un autre côté, parce que $\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi-\alpha)$,

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi-\alpha) \ ,$$

ou par la formule $\text{Sin}.(p+q)\text{Sin}.(p-q)=\tfrac{1}{2}(\text{Cos}.2q-\text{Cos}.2p)$,

$$\text{Sin}.(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin}.(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=\tfrac{1}{2}(\text{Cos}.\tfrac{4}{3}\varpi-\text{Cos}.2\alpha)$$

ou bien

$$\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\text{Sin.}^2\alpha=-\tfrac{3}{4}+\text{Sin.}^2\alpha\ ;$$

au moyen de quoi le coefficient de x se réduit à $-\frac{3}{4}$.
Enfin, d'après ce dernier résultat

$$\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=-\text{Sin.}\alpha(\tfrac{3}{4}-\text{Sin.}^2\alpha)$$

ou encore (2)

$$\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}(\tfrac{2}{3}\varpi+\alpha)\text{Sin.}(\tfrac{4}{3}\varpi+\alpha)=\text{Sin.}^3\alpha-\tfrac{3}{4}\text{Sin.}\alpha=-\tfrac{1}{4}m$$

de sorte que le dernier terme se réduit à $\frac{1}{4}m$. L'équation réduite est donc finalement

$$x^3-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}m=0\ ;$$

c'est-à-dire exactement la même que la proposée qui conséquemment doit, comme elle, avoir pour ses trois racines, $\text{Sin.}\alpha$, $\text{Sin.}(\frac{2}{3}\varpi+\alpha)$ et $\text{Sin.}(\frac{4}{3}\varpi+\alpha)$.

Si l'on avait $m=+1$ ou $m=-1$; ce qui pourrait être, l'équation deviendrait

$$x^3-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}=0 \quad \text{ou} \quad x^3-\tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{4}=0\ ;$$

elle serait satisfaite par $x=+1$ ou $x=-1$; on aurait donc $\alpha=\frac{1}{6}\varpi$ ou $\alpha=\frac{1}{2}\varpi$; les trois racines seraient donc

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{5}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{9}{6}\varpi \quad \text{ou} \quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{7}{6}\varpi,\ \text{Sin.}\tfrac{11}{6}\varpi\ ;$$

ou bien encore

$$+\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{1}{2},\ -1 \quad \text{ou} \quad +1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}$$

c'est-à-dire que, dans l'un et dans l'autre cas, elle aurait deux racines égales. On parviendrait à la même conclusion en divisant l'équation par $x-1$ ou par $x+1$; le quotient serait

$$(x-\tfrac{1}{2})^2=0 \qquad \text{ou} \qquad (x+\tfrac{1}{2})^2=0\,;$$

On pourrait employer le même procédé pour démontrer la réalité de toutes les racines de l'équation

$$x^5-\tfrac{5}{4}x^3+\tfrac{5}{16}x-\tfrac{1}{16}m=0\ ,$$

à laquelle conduit le problème de la quintisection de l'angle ; mais, comme le calcul est un peu long, nous ne nous y arrêterons pas.