ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VINCENT

Arithmétique pratique. Sur l'erreur que l'emploi des parties proportionnelles peut entraîner dans les calculs par logarithmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 19-25
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__19_1>

ARITHMÉTIQUE PRATIQUE.

Sur l'erreur que l'emploi des parties proportionnelles peut entraîner dans les calculs par logarithmes ;

Par M. Vincent, Professeur de mathématiques et de physique au Collége royal de Reims.

Lorsque, dans les calculs par logarithmes, pour suppléer à l'insuffisance des tables, on a recours aux parties proportionnelles, les résultats auxquels on parvient sont affectés de deux sortes d'erreurs; 1.° on suppose d'abord les différences des logarithmes proportionnelles à celles des nombres auxquels ils appartiennent; ce qui, même pour des nombres très-grands et très-peu différens, n'est qu'à peu près vrai; 2.° en admettant cette proportionnalité, les logarithmes que l'on emploie pour calculer le résultat qu'on veut obtenir, ne sont point exacts, et peuvent être fautifs, en plus ou en moins, d'une quantité qui a pour limite une demi-unité décimale du dernier ordre.

Bertrand de Genève a discuté, il y a déjà long-temps, l'effet de la première de ces deux causes d'erreur (*) ; mais il n'a rien

(*) Tout ce que Bertrand a si longuement développé sur ce sujet, dans dit de la second qui est pourtant beaucoup plus influente. C'est en conséquence le seul point que nous traiterons ici où nous supposerons que, dans les limites de l'approximation des tables, la proportionnalité entre les différences des nombres et celles de leurs logarithmes peut être regardée comme tout-à-fait rigoureuse.

---

son volumineux ouvrage, nous paraît pouvoir être réduit au peu qui suit :

Lorqu'on cherche, par les parties proportionnelles, le logarithme d'un nombre en partie entier et en partie fractionnaire, on emploie dans le calcul les logarithmes de deux nombres consécutifs des tables, ne différant que d'une unité ; d'où il suit que, pour que l'emploi des parties proportionnelles soit légitime, il faut, tout au moins, que les différences des logatithmes soient constantes en même temps que celles des nombres, pour une portion des tables dans laquelle les nombres extrèmes ne diffèrent que d'une unité. En prenant donc pour ces nombres extrêmes $N-\frac{1}{2}$ et $N+\frac{1}{2}$ il faudra que, si l'on n'a pas rigoureusement

$$\text{Log.}N-\text{Log.}(N-\tfrac{1}{2})=\text{Log.}(N+\tfrac{1}{2})-\text{Log.}N\,,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{Log.}\frac{N}{N-\frac{1}{2}}=\text{Log.}\frac{N+\frac{1}{2}}{N}\,,$$

la différence entre ces deux quantités soit au moins plus petite qu'une demi-unité décimale du dernier ordre des tables ; c'est-à-dire qu'en désignant par n le nombre des chiffres décimaux admis dans les tables, il faudra qu'on ait

$$\text{Log.}\frac{N}{N-\frac{1}{2}}-\text{Log.}\frac{N+\frac{1}{2}}{N}=\text{Log.}\frac{N^2}{N^2-\frac{1}{4}}=\text{Log.}\frac{4N^2}{4N^2-1}<\frac{1}{2.10^n}\,.$$

Mais en désignant par μ le module de nos tables vulgaires, on a rigoureusement

$$\text{Log.}\frac{4N^2}{4N^2-1}=2\mu\left\{\frac{1}{8N^2-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(8N^2-1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(8N^2-1)^5}+\ldots\right\};$$

Nous ferons d'abord observer que les logarithmes rigoureux diffèrent de ceux qu'on inscrit dans les tables d'une quantité dont la limite est la moitié d'une unité décimale du dernier ordre, et que conséquemment les différences logarithmiques employées peuvent être en erreur d'une quantité dont la limite est une unité toute entière de cet ordre. En second lieu, lorsqu'on multiplie cette différence par la fraction qui accompagne l'entier, dans le nombre dont on veut obtenir le logarithme, on néglige les chiffres du produit qui viennent après le dernier des chiffres décimaux de l'ordre des tables, ce qui affecte le résultat d'une nouvelle erreur, dont la limite est la moitié d'une unité de ce même ordre.

---

et, comme les termes qui suivent le premier dans la série sont d'une petitesse incomparable à la sienne, il suffira bien qu'on ait

$$\frac{2\mu}{8N^2-1} \text{ ou même simplement } \frac{2\mu}{8N^2} < \frac{1}{2.10^n},$$

d'où

$$N > \sqrt{\frac{10.^n\mu}{2}}.$$

En se rappelant donc que $\mu=0,4342944819\ldots$; on trouvera, pour les tables

à 5 décimales,	$N>147$,
à 6 décimales,	$N>465$,
à 7 décimales,	$N>1473$,
à 8 décimales,	$N>4659$,

et ainsi de suite. On peut donc, dans l'usage des tables de Callet, qui commencent à 10000, employer les parties proportionnelles dès l'origine.

J. D. G.

Cela posé, on peut avoir à résoudre ces deux questions : 1.° *Étant donné un nombre, déterminer le logarithme qui lui répond ?* 2.° *Etant donné un logarithme, déterminer le nombre qui lui répond ?* Occupons-nous tour à tour de leur résolution. Mais, pour plus de simplicité, et attendu l'usage où l'on est dans les tables de supprimer les caractéristiques, considérons les logarithmes des tables comme des entiers, ce qui revient à prendre pour unité l'unité décimale du dernier ordre des tables.

I. Soit $N+f$ un nombre dont on demande le logarithme ; N étant un nombre entier et f une fraction, et soient l et l' les logarithmes de N et $N+1$, tels qu'ils se trouvent dans les tables. Soient λ, λ', respectivement, les quantités dont ces logarithmes sont fautifs *en moins*, les erreurs pouvant d'ailleurs être indifféremment *positives* ou négatives ; en supposant la méthode des parties proportionnelles exacte, comme nous le faisons ici, on aurait

$$\text{Log.}(N+f)=l+\lambda+f.(l'+\lambda'-l-\lambda)\ ;$$

mais d'abord on néglige λ et λ' ; et en outre on rejette toute la partie fractionnaire du produit $f.(l'-l)$; sauf à augmenter le dernier chiffre de sa partie entière d'une unité, s'il y a lieu ; ce qui peut encore entraîner une erreur dont la limite est une demi-unité.

En représentant par e cette erreur *en moins*, qui peut être d'ailleurs *positive* ou *négative*, on prendra donc $l+f(l'-l)-e$, au lieu de $l+\lambda+f.(l'+\lambda'-l-\lambda)$ qu'on devrait prendre ; d'où résulte l'erreur finale

$$\lambda(1-f)+\lambda'f+e\ .$$

En supposant donc que les trois erreurs λ, λ', e atteignent leur limite $+\frac{1}{2}$, car c'est évidemment le cas où l'erreur totale est plus considérable ; cette erreur totale sera

$$\tfrac{1}{2}(1-f+f+1)=1 .$$

Ainsi, l'*erreur commise par l'emploi des parties proportionnelles, dans la recherche du logarithme d'un nombre en partie entier et en partie décimal*, *même dans le cas où cet emploi est légitime*, *peut s'élever*, *soit en plus soit en moins*, *jusqu'à une unité décimale du dernier ordre.*

Donc, une somme de logarithmes et de complémens arithmétiques de logarithmes peut être fautive d'une quantité dont la limite est autant d'unités décimales du dernier ordre qu'il y a de parties dont cette somme se compose.

Donc aussi, si, dans la vue d'obtenir une puissance d'un nombre, on multiplie son logarithme par l'exposant de la puissance; le logarithme produit pourra être fautif d'autant d'unités décimales du dernier ordre qu'il y aura d'unités dans l'exposant de la puissance.

II. Passons à la seconde question. Soit proposé de déterminer le nombre auquel répond un logarithme donné $l+d$, compris entre deux logarithmes consécutifs l et l' des tables, répondant aux nombres, aussi consécutifs, N et $N+1$. On répute pour le nombre cherché

$$N+\frac{d}{l'-l} ;$$

mais d'abord, le logarithme donné $l+d$ n'étant poussé qu'au même degré d'approximation des logarithmes des tables, d est passible d'une erreur *positive* ou *négative en moins* qu'on peut représenter par δ et dont la limite est $\frac{1}{2}$. En outre, les deux logarithmes des tables l et l' peuvent, comme ci-dessus, être fautifs en *moins* des quantités, *positives* ou *négatives* λ et λ', dont la limite est également une demi-unité; enfin au lieu de d on devrait prendre $l+d+\delta-(l+\lambda)$, c'est-à-dire $d+(\delta-\lambda)$; de sorte que le nombre demandé est réellement

$$N + \frac{d+\delta-\lambda}{(l'+\lambda')-(l+\lambda)} \; ;$$

en prenant donc sa différence avec l'autre, on aura, pour l'erreur commise

$$\frac{d+\delta-\lambda}{(l'-l)+(\lambda'-\lambda)} - \frac{d}{(l-l')} = \frac{(l'-l)(\delta-\lambda)-d(\lambda'-\lambda)}{(l'-l)\{(l'-l)+(\lambda'-\lambda)\}}$$

ou, en représentant par D la différence des tables;

$$\frac{D(\delta-\lambda)-d(\lambda'-\lambda)}{D\{D+(\lambda'-\lambda)\}} \; ;$$

or, il est manifeste que cette fraction sera la plus grande possible, lorsque $\delta-\lambda$ aura la plus grande valeur positive et $\lambda'-\lambda$ la plus grande valeur négative possible, c'est-à-dire, lorsque la première de ces deux quantités sera égale à $+1$ et la seconde égale à -1; de sorte que la limite de l'erreur commise est

$$\frac{D+d}{D(D-1)} \, .$$

Présentement, si, au lieu de corriger le nombre N par addition, nous eussions voulu corriger le nombre $N+1$ par soustraction, nous aurions eu alors pour limite de l'erreur, en faisant exactement les mêmes raisonnemens et les mêmes calculs,

$$\frac{D+(D-d)}{D(D-1)} \, .$$

Cela posé, d est toujours compris entre o et D, et la première fraction croît en même temps que lui; mais quand on a $d>\frac{1}{2}D$, on peut prendre la seconde, qui est alors moindre, de sorte que le maximum d'erreurs répond à $d=\frac{1}{2}D$; ce maximum est donc

$$\frac{3}{2(D-1)}$$

quantité qui croît de plus en plus, à mesure que D diminue ou qu'on avance davantage dans les tables.

Par exemple, dans les tables de Lalande, où la plus petite différence est 4, le maximum de l'erreur est $\frac{1}{2}=0,5$ d'où il suit qu'en employant ces tables à la recherche d'un nombre voisin de *dix mille*, à l'aide de son logarithme, on ne pourra pas compter sur le chiffre des dixièmes. Si ce sont les tables de Callet dont on fait usage, comme leur plus petite différence est 44, le maximum de l'erreur sera $\frac{3}{2.43}=0,035$, de sorte qu'en employant ces tables à la recherche d'un nombre voisin de *cent mille* à l'aide de son logarithme, on ne devra pas compter sur le chiffre des centièmes.

Si l'on veut déterminer quelle doit être la valeur de D pour que le nombre cherché ne soit pas fautif de la fraction $\frac{1}{n}$, il faudra satisfaire à l'inégalité

$$\frac{3}{2(D-1)}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad D>3n+1.$$

Ainsi, malgré ce que nous venons de dire, on peut, en employant les tables de Lalande, compter sur le chiffre des dixièmes, lorsque les différences tabulaires ne sont pas moindres que 31, c'est-à-dire, lorsque le nombre cherché est compris entre 1000 et 1400 environ; et, en employant les tables de Callet, on peut compter sur les centièmes, lorsque les différences ne sont pas moindres que 301, c'est-à-dire, lorsque le nombre cherché est compris entre 10000 et 14400 environ.

Dans une autre note nous nous occuperons des tables des fonctions circulaires.