ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SERVOIS

Géométrie élémentaire. Lettre au rédacteur des Annales, sur la théorie des parallèles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 233-238
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__233_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Lettre au Rédacteur des Annales, *Sur la théorie des parallèles*,

Par M. Servois, conservateur du Muséum d'Artillerie.

Des insomnies, mon bien excellent ami, compagnes et suite de fluxions combinées, croisées, enchevêtrées, etc., m'ont procuré des rêves; or les rêves d'un géomètre roulent sur la géométrie, et ceux d'un vieillard remontent vers l'A, B, C; ainsi attendez-vous à lire des rêves sur *les parallèles*.

Premier rêve. M. Legendre (XII.e édition de sa Géométrie) enseigne à construire un triangle tel que la somme de ses trois angles soit égale à celle des trois angles d'un triangle donné ABC (fig. 1) et dans lequel, en outre, la somme de deux des angles soit plus petite qu'un angle donné.

Soit en effet B le plus grand des trois angles du triangle donné; soit M le milieu de l'un quelconque BC des deux côtés adjacens, et soit menée la droite AM. Soit menée la droite A_1C_1, double de AM, et ayant son milieu en N. Par ce point N, soit menée une droite NB_1 égale à $MB=MC$, et faisant avec A_1C_1 deux angles B_1NA_1 et B_1NC_1, respectivement égaux aux deux angles AMC et AMB. Alors, en tirant B_1A_1 et B_1C_1 on obtiendra deux triangles B_1NA_1 et B_1NC_1, respectivement égaux aux deux triangles CMA et BMA; d'où il suit évidemment que la somme des trois angles du triangle total $A_1B_1C_1$ sera la même que celle des trois angles du triangle ABC. De plus, dans le triangle $A_1B_1C_1$, le côté $B_1A_1 = AC$ sera plus grand que le côté $B_1C_1 = BA$; d'où il suit que l'angle A_1 sera plus petit que l'angle C_1 ; or, comme on a d'ailleurs, par suite de la construction, $A_1 + C_1 = A$, il s'ensuit qu'on aura $A_1 < \frac{1}{2}A$. Enfin, puisque B_1 est plus grand que B, cet angle B_1 sera le plus grand des trois angles du nouveau triangle.

Par une semblable construction, on transformera le triangle $A_1B_1C_1$ en un autre $A_2B_2C_2$, dont la somme des angles sera encore la même, et dans lequel on aura $A_2 < \frac{1}{2}A_1$, et, par suite, $A_2 < \frac{1}{4}A$. En poursuivant donc ainsi, on pourra parvenir à un triangle $A_nB_nC_n$ où l'on aura $A_n < \frac{1}{2^n}A$, et par suite $A_n < \delta$, en désignant par δ un angle aussi petit qu'on voudra. Faisant alors une transformation de plus, on parviendra à un dernier triangle abc, dans lequel on aura $a + c = A_n$, et par suite $a + c < \delta$.

M. Legendre a fort bien démontré, avec son ruban, (voyez les éditions antérieures de sa Géométrie), que la somme $A + B + C$ des trois angles d'un triangle ne pouvait excéder deux angles droits; mais, comme il n'est pas encore démontré que cette somme ne peut être moindre, on est obligé de supposer, en désignant par D l'angle droit, $A + B + C = 2D - \delta$, l'angle δ étant inconnu. Or je vais démontrer que, pourvu qu'on admette que la somme des trois angles de tout triangle est plus grande qu'un droit, ou que $A + B + C = D + \theta$, cet angle δ doit être nul.

En effet, transformons ABC (fig. 1) en abc (fig. 2), de manière qu'on ait $a + c < \theta$; alors on aura $b > D$. Construisons, sur ab triangle abk, équilatéral avec abc ; l'angle kbc, supplément à quatre droites du double de b, sera $< 2D$. Tirons ck et nous aurons un nouveau triangle ack dont la somme S des angles sera égale, moins quatre droites, à la somme des angles réunis des trois triangles abc, abk, bck ; c'est-à-dire qu'on aura, en représentant par $2D-\delta'$ la somme des angles du triangle *cbk*, $S=2(2D-\delta)+(2D-\delta')-4D$, ou bien $S=2D-2\delta-\delta'$; ou enfin, plus simplement $S<2D-2\delta$.

Transformons pareillement *ack* en $a_1c_1k_1$; ici on aura $S_1=2(2D-2\delta-\delta')+(2D-\delta'')-4D$; ou simplement $S_1<2D-4\delta$. En continuant ainsi, on aura, après n transformations, $S_n<2D-2^n\delta$. Or, quelque petit que soit l'angle δ, *s'il n'est pas nul*, $2^n\delta$ pourra égaler ou surpasser D; d'où il résultera, contrairement à l'hypothèse $S_n<D$.

Ainsi le théorème pythagoricien, concernant la somme des angles du triangle, serait complètement démontré, si l'on parvenait à démontrer celui-ci : « il n'y a pas de triangle dans lequel la » somme des angles soit égale ou inférieure à un angle droit ».

Un de vos docteurs (si ma mémoire ne faut) a proposé jadis, pour faciliter la cure des maladies, de les transformer : de faire en sorte, par exemple, qu'une affection chronique irrégulière devienne régulièrement intermittente. Je désirerais fort que la nouvelle forme que prend ici la maladie *les parallèles* se prêtât à un traitement qui pût être couronné d'un heureux succès. Quoi qu'il en puisse advenir, en elle même et comme fait, la transformation dont il s'agit me paraît curieuse.

Autre rêve. Soit le triangle ABC (fig. 3), rectangle en B. Elevons CE, perpendiculaire à BC en C. Par un point quelconque *b*, entre B et C, élevons une autre perpendiculaire *be*, sur la même droite BC, cette droite étant parallèle au côté BA coupera nécessairement le côté AC en quelque point *a*. Dans le quadrilatère convexe *ab*BA, qui a deux angles droits en B et *b*, on aura la somme B*Aa*+A*ab* des deux autres angles inférieurs ou tout au plus égale à $2D$; car de ce que la somme des angles d'un triangle ne saurait être $>2D$, il suit que celle d'un quadrilatère convexe ne saurait être $>4D$. D'un autre côté, $2D=$A*ab*+*bac*;

donc la somme $BAa+Aab$ doit être inférieure ou tout au plus égale à $Aab+baC$, ou, en réduisant $BAa \leqq baC$.

Si, entre b et C, on élève une autre perpendiculaire $b'e'$, coupant AC en a' on aura de même $baa' \leqq b'a'C$. Ainsi, en imaginant qu'une droite, constamment perpendiculaire à BC, parte de la position BA, pour parvenir à une dernière position CE; cette droite ne cessera de couper AC, en faisant avec elle des angles baC $b'a'C$, ... qui croîtront continuellement, à moins qu'ils ne s'avisent de rester égaux pendant quelque temps.

Admettons pour un moment cette hypothèse, et soit $baC=b'a'C$. Par le milieu o de aa', j'abaisse sur $b'e'$ la perpendiculaire ok qui prolongée ira couper be en l. A cause de l'égalité des triangles $oa'k$ et oal, ol sera aussi perpendiculaire sur be. Ainsi, dans cette hypothèse, on aurait un quadrilatère $blkb'$ dont les quatre angles seraient tous droits, résultat qui donnerait, sur-le-champ, comme on sait, la démonstration du théorème pythagoricien. Il faut donc, si l'on veut prolonger la discussion, supposer que les angles baC, $b'a'C$, ... ou, ce qui est la même chose, leurs opposés au sommet Aae, $Aa'e'$, ... croissent sans interruption vers une limite qui est l'angle ACE. On ne dira pas qu'au lieu de ACE il faut prendre pour limite un angle moindre $ACE-\theta$; car par C soit menée Cp, faisant avec CE un angle θ, notre droite mobile, dans sa dernière position, serait à la fois sur CE et sur CpE; c'est-à-dire qu'il y aurait deux chemins distincts et les plus courts entre C et E; ce qui est absurde. Ceci est un lemme pour ce qui suit.

Soit un triangle acutangle, non équilatéral ABC (fig. 4). Sur AB, je construis ABK, équilatéral avec ABC, et je tire CK, coupant AB en P. Soient S, S', S'' les sommes d'angles des triangles ABC, ACK, BCK, respectivement. On aura $2S=S'+S''$. Or les sommes S', S'' sont inégales ou égales. Dans le premier cas, soit $S'<S''$, on aura donc aussi $S'<S$. Comme CK est per-

pendiculaire sur AB en P ; à partir de CK, je fais mouvoir perpendiculairement à AB, en allant vers A, une droite qui, d'après le précédent lemme, fera constamment avec AC et AK des angles de plus en plus grands. Soit EF une de ses positions, coupant AB en O. Si AEF—ACK$=\frac{S-S'}{2}$, on aura S pour la somme des angles du triangle AEF; car, soit Z cette somme, on a $Z=A+2AEF$ et $S'=A+2ACK$, d'où $2(AEF-ACK)=Z-S'$, équation qui donne $Z=S$, quand on fait ADF—ACK$=\frac{S-S'}{2}$. Or les sommes d'angles des triangles AEF, entre C et A, peuvent devenir assez grandes pour admettre l'hypothèse d'un triangle intermédiaire ayant la somme de ses angles égale à S. En effet, comme on l'a prouvé, la limite des accroissemens de sommes d'angles pour AEF est $D-\frac{1}{2}A$ ou $\frac{2D-A}{2}$; D désignant toujours l'angle droit; donc, la limite des accroissemens de AEF—ACK sera $\frac{2D-A}{2}-\frac{S'-A}{2}$ ou $\frac{2D-S'}{2}$; quantité toujours plus grande que $\frac{S-S'}{2}$, puisque S est supposé $<2D$.

Cela étant; je prend sur AB une longueur OH=OA, je joins HF; et le triangle AHF aura S pour sommes d'angles; attendu qu'il a même somme d'angles que le triangle AEF. Je joins KH. Alors, désignant par $2D-\delta$, $2D-\delta'$ les sommes d'angles respectives des triangles BKH et FHK, j'aurai visiblement

$$S+(2D-\delta)+(2D-\delta')-2D-2D=S;$$

d'où résulte $\delta+\delta'=0$; ou bien $\delta=\delta'=0$, parce que δ et δ' sont essentiellement de mêmes signes. Donc j'aurai deux triangles BKH, KHF, qui ont l'un et l'autre une somme d'angles égale à $2D$. Or, on sait qu'il suffit d'avoir un seul triangle de cette espèce pour démontrer complètement le théorème pythagoricien.

Dans le deuxième cas ; c'est-à-dire, si $S'=S''=S$, il est visible qu'alors les triangles rectangles BPC et APC auraient même somme d'angles T. Je prends $PN=PB$, pour avoir le triangle CPN égal à CPB. Ainsi, désignant par $2D-\delta$ la somme des angles du triangle ACN, j'aurai $T+(2D-\delta)-2D=T$, d'ou $\delta=0$; et partant, voilà encore un triangle ACN qui a $2D$ pour la somme de ses angles. Considérez tout ceci, au surplus, *velut ægri somnia.*

Paris, le 15 novembre 1825.