ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Formules d'optique à trois dimensions

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 247-254

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__247_1>

OPTIQUE.

Formules d'optique à trois dimensions ;

Par M. GERGONNE.

NOUS nous proposons, dans ce qui va suivre, de construire, pour la résolution des problèmes d'optique qui embrassent inévitablement les trois dimensions de l'espace, des formules analogues à celles que nous avons construites à la page 65 du présent volume, pour la résolution des problèmes d'optique plane. Nous montrerons ensuite, par un exemple, la manière d'en faire usage.

Le théorème fondamental consiste ici en ce que, *à chaque surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, il répond toujours une surface trajectoire orthogonale des rayons réfractés telle que, de quelque point de la surface séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales à ces deux autres surfaces, les longueurs de ces normales seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.*

Soient donc (t, u, v) un quelconque des points de la surface séparatrice, (x', y', z') et $x, y, z)$ les pieds des normales abaissées de ce point sur les deux surfaces trajectoires; et supposons que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction soit celui de λ' à λ; on aura d'abord

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-x')^2+(u-y')^2+(v-z')^2}{\lambda'^2}\,. \quad (1)$$

De plus, parce que les droites menées du point (t, u, v) aux deux autres sont respectivement normales aux surfaces auxquelles elles se terminent, en posant

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=p\,,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=q\,,\qquad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}=p'\,,\quad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}=q'\,,$$

on aura aussi

$$(t-x)+p(v-z)=0\,,\quad (2)\qquad (t-x')+p'(v-z')=0\,,\quad (2')$$

$$(u-y)+q(v-z)=0\,,\quad (3)\qquad (u-y')+q'(v-z')=0\,.\quad (3')$$

Remarquons présentement qu'il n'y a proprement dans tout ceci que t et u de variables indépendantes, et qu'on a

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dt}=p\,\frac{dx}{dt}+q\,\frac{dy}{dt}\ ,$$

$$\frac{dz}{du}=\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{du}+\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{du}=p\,\frac{dx}{du}+q\,\frac{dy}{du}\ ,$$

$$\frac{dz'}{dt}=\frac{dz'}{dx'}\,\frac{dx'}{dt}+\frac{dz'}{dy'}\,\frac{dy'}{dt}=p'\,\frac{dx'}{dt}+q'\,\frac{dy'}{dt}\ ,$$

$$\frac{dz'}{du}=\frac{dz'}{dx'}\,\frac{dx'}{du}+\frac{dx'}{dy'}\,\frac{dy'}{du}=p'\,\frac{dx'}{du}+q'\,\frac{dy'}{du}\ ,$$

en prenant donc, sous ce point de vue, les deux différentielles partielles de l'équation (1), par rapport à t et u, on trouvera

$$\frac{(t-x)\left(1-\frac{dx}{dt}\right)-(u-y)\,\frac{dy}{dt}+(v-z)\left(\frac{dv}{dt}-p\,\frac{dx}{dt}-q\,\frac{dy}{dt}\right)}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(t-x')\left(1-\frac{dx'}{dt}\right)-(u-y')\,\frac{dy'}{dt}+(v-z')\left(\frac{dv}{dt}-p'\,\frac{dx'}{dt}-q'\,\frac{dy'}{dt}\right)}{\lambda'^2},$$

$$\frac{-(t-x)\,\frac{dx}{du}+(u-y)\left(1-\frac{dy}{du}\right)+(v-z)\left(\frac{dv}{du}-p\,\frac{dx}{du}-q\,\frac{dy}{du}\right)}{\lambda^2}$$

$$=\frac{-(t-x')\,\frac{dx'}{du}+(u-y')\left(1-\frac{dy'}{du}\right)+(v-z')\left(\frac{dv}{du}-p'\,\frac{dx'}{du}-q'\,\frac{dy'}{du}\right)}{\lambda'^2};$$

ou encore

$$\frac{(t-x)+(v-z)\,\frac{dv}{dt}-[(t-x)+p(v-z)]\,\frac{dx}{dt}-[(u-y)+q(v-z)]\,\frac{dy}{dt}}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(t-x')+(v-z')\frac{dv}{dt}-[(t-x')+p'(v-z')]\frac{dx'}{dt}-[(u-y')+q'(v-z')]\frac{dy'}{dt}}{\lambda'^2};$$

$$\frac{(u-y)+(v-z)\frac{dv}{du}-[(t-x)+p(v-z)]\frac{dx}{du}-[(u-y)+q(v-z)]\frac{dy}{du}}{\lambda^2}$$

$$=\frac{(u-y')+(v-z')\frac{dv}{du}-[(t-x')+p'(v-z')]\frac{dx'}{du}-[(u-y')+q'(v-z')]\frac{dy'}{du}}{\lambda'^2};$$

ou enfin, en ayant égard aux équations (2, 3, 2′, 3′)

$$\frac{(t-x)+(v-z)\frac{dv}{dt}}{\lambda^2}=\frac{(t-x')+(v-z')\frac{dv}{dt}}{\lambda'^2}; \qquad (4)$$

$$\frac{(u-y)+(v-z)\frac{dv}{du}}{\lambda^2}=\frac{(u-y')+(v-z')\frac{dv}{du}}{\lambda'^2}; \qquad (5)$$

équations évidemment comportées par les cinq autres, mais qu'on pourra substituer, avec avantage, à deux des quatre équations (2, 3, 2′, 3′), lorsque la surface séparatrice des deux milieux sera une des données du problème. On voit que, dans ce système d'équations, x', y', z', λ' figurent de la même manière que x, y, z, λ ; et l'on n'aura pas lieu d'en être surpris, si l'on considère que, le rayon réfracté étant pris pour rayon incident, celui-ci devient rayon réfracté, et *vice versâ*. Il en résulte que la surface séparatrice des deux milieux étant donnée, le problème où l'on cherche la surface trajectoire orthogonale des rayons incidens, à l'aide de celle des rayons réfractés n'est pas différent de celui où il s'agirait de déterminer cette dernière, l'autre étant donnée.

Enfin, les coordonnées de nos trois points doivent être liées par un nombre égal d'équations en t, u, v en x, y, z et en x', y', z', lesquelles ne sont autre chose que celles même de nos trois surfaces, équations que nous représenterons par

$$S=0\,, \qquad (6)$$

$$T=0\,, \quad (7) \qquad T'=0\,; \quad (7')$$

la première appartenant à la surface séparatrice, et les deux autres aux deux surfaces trajectoires.

Lorsque, cette surface séparatrice étant donnée, on demandera de déterminer l'une des deux surfaces trajectoire par l'autre, il ne s'agira, pour cela, que d'éliminer ou les six coordonnées t, u, v, x', y', z', entre les sept équations (1, 2', 3', 4, 5, 6, 7'), ou bien les six coordonnées t, u, v, x, y, z, entre les sept équations (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7); et l'équation résultante, en x, y, z ou en x', y', z', sera l'équation de la surface trajectoire cherchée.

Si, au contraire, il s'agit de déterminer la surface séparatrice, au moyen des deux surfaces trajectoires, on y parviendra en éliminant les six coordonnées x, y, z, x', y', z', entre les sept équations (1, 2, 2', 3, 3', 7, 7'); ce qui conduira à une équation en t, u, v, qui sera celle de la surface demandée.

Quant aux problèmes relatifs à la réflexion de la lumière, on les résoudra à l'aide des mêmes formules, en y posant préalablement $\lambda+\lambda'=0$.

Pour montrer, par un exemple, l'usage de ces formules, supposons que la surface séparatrice soit celle d'une sphère d'un rayon r, ayant son centre à l'origine, et que les rayons incidens partent tous d'un point (a, b, c); nous aurons d'abord les équations

$$x'=a\,, \qquad y'=b\,, \qquad z'=c\,,$$

qui remplaceront les équations (2′,3′,7′) et ensuite, pour l'équation (6)

$$t^2+u^2+v^2=r^2 ,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{t}{v} , \qquad \frac{dv}{du}=-\frac{u}{v} ;$$

En mettant ces valeurs dans les équations (1,4,5), elles deviendront

$$\frac{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2}{\lambda^2}=\frac{(t-a)^2+(u-b)^2+(v-c)^2}{\lambda'^2} ;$$

$$\frac{tz-vx}{\lambda^2}=\frac{ct-av}{\lambda'^2} , \qquad \frac{uz-vy}{\lambda^2}=\frac{cu-bv}{\lambda'^2} .$$

Les deux dernières, combinées avec l'équation de la sphère donneront

$$t=\frac{(\lambda'^2x-\lambda^2a)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

$$u=\frac{(\lambda'^2y-\lambda^2b)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

$$v=\frac{(\lambda'^2z-\lambda^2c)r}{\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}} ,$$

d'où

$$(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)v$$

$$=r\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2} ,$$

mais l'autre équation donne, en chassant les dénominateurs et développant ,

$$(\lambda'^2-\lambda^2)(t^2+u^2+v^2)-2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)v\}$$

$$+\lambda'^2(x^2+y^2+z^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

ou simplement

$$2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)t+(\lambda'^2y-\lambda^2b)u+(\lambda'^2z-\lambda^2c)\}$$

$$=\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda'(a^2+b^2+c^2+r^2)\ ;$$

on aura donc ainsi

$$\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2+r^2)$$

$$=2r\sqrt{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2}\ ;$$

ou bien encore

$$4r^2\{(\lambda'^2x-\lambda^2a)^2+(\lambda'^2y-\lambda^2b)^2+(\lambda'^2z-\lambda^2c)^2\}$$

$$=\{\lambda'^2(x^2+y^2+z^2+r^2)-\lambda^2(a^2+b^2+c^2+r^2)\}^2\ ;$$

résultat qui se lie parfaitement avec celui que nous avons obtenu page 78.

Pour donner un exemple du cas où la surface séparatrice est inconnue, supposons que les rayons incidens partent tous de l'origine, et cherchons quelle doit être cette surface pour que les rayons réfractés concourent tous en un même point (a,b,c). Nous aurons ici

$$x'=0\ ,\quad y'=0\ ,\quad z'=0\ ,$$

$$x=a\ ,\quad y=b\ ,\quad z=c\ ;$$

valeurs qui substituées dans l'équation (1) la changeront en celle-ci

$$\frac{(t-a)^2+(u-b)^2+(v-c)^2}{\lambda^2}=\frac{t^2+u^2+v^2}{\lambda'^2};$$

c'est-à-dire,

$$(\lambda'^2-\lambda^2)(t^2+u^2+v^2)-2\lambda'^2(at+bu+cv)+\lambda'^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

ou encore

$$\left\{t-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}a\right\}^2+\left\{u-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}b\right\}^2+\left\{v-\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2-\lambda^2}c\right\}^2=\left\{\frac{\lambda'\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\lambda'^2-\lambda^2}\right\}^2;$$

équation d'une sphère, comme on pouvait bien s'y attendre.