ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Trigonométrie. Note sur l'analise des sections angulaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 254-257
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__254_1>

TRIGONOMÉTRIE.

Note sur l'analise des sections angulaires;

Par un ABONNÉ.

SOIT posé, avec M. Poisson (*Bulletin universel* 1825, n.° 9, pag. 142),

$$X=\text{Cos}.mx+\frac{m}{1}\text{Cos}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Cos}.(m-4)x+\ldots\ldots,$$

$$X'=\text{Sin}.mx+\frac{m}{1}\text{Sin}.(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\text{Sin}.(m-4)x+\ldots;$$

on aura comme l'on sait

$$(2\mathrm{Cos}.x)^m=X+X'\sqrt{-1}\ ,\quad \text{ou bien}\quad (2\mathrm{Cos}.x)^m=X-X'\sqrt{-1}\ ;$$

d'où il suit que le second membre de la première équation, en y changeant x en $x+2i\varpi$, devra être supposé identique avec le second membre de la seconde où on aurait changé x en $x+2i'\varpi$; i et i' étant deux nombres entiers, compris entre o et n, dénominateur de $m=\frac{p}{n}$, et ces nombres entiers étant accouplés d'une manière convenable. On voit en effet que, par l'effet de cette substitution, les premiers membres n'éprouvent aucun changement.

Mais alors

$$X+X'\sqrt{-1}\ \text{se change en}\ (X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi\varpi+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mi\varpi)\ ,$$

$$X-X'\sqrt{-1}\ \text{se change en}\ (X-X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi'\varpi-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mi'\varpi)\ ,$$

donc, par un choix convenable des nombres i et i', on doit avoir

$$(X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi\varpi+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mi\varpi)=(X-X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}.2mi'\varpi-\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mi'\varpi)$$

qui se réduit à

$$(X+X'\sqrt{-1})\{\mathrm{Cos}.2m(i+i')\varpi+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2m(i+i')\varpi\}=X-X'\sqrt{-1}\ .$$

En désignant par k soit la somme $i+i'$, si elle est moindre que n, soit le reste de la division de cette somme par n, si elle est plus grande; il viendra

$$(X+X'\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\ 2mk\varpi+\sqrt{-1}\mathrm{Sin}.2mk\varpi)=X-X'\sqrt{-1}\ ;$$

ou, en développant et égalant séparément entre elles les parties réelles et les parties imaginaires

$$X(1-\mathrm{Cos}\ 2mk\varpi)+X'\mathrm{Sin}\ 2mk\varpi=0\ ,$$

$$X\text{Sin.}2mk\varpi+X'(1+\text{Cos.}2mk\varpi)=0\ ,$$

ou encore

$$2X\text{Sin.}^2mk\varpi+2X'\text{Sin.}mk\varpi\text{Cos.}mk\varpi=0\ ,$$

$$2X\text{Sin.}mk\varpi\text{Cos.}mk\varpi+2X'\text{Cos.}^2mk\varpi=0\ ;$$

équations qui donnent également, en réduisant,

$$X\text{Sin.}mk\varpi+X'\text{Cos.}mk\varpi=0.$$

Cette relation très-simple permet d'éliminer, à volonté, de la valeur de $(2\text{Cos.}x)^m$ l'une quelconque des deux fonctions X et X'. Si, par exemple, on en veut éliminer la dernière, on aura

$$(2\text{Cos.}x)^m=X-X'\sqrt{-1}=X+X\frac{\text{Sin.}mk\varpi}{\text{Cos.}mk\varpi}\sqrt{-1}\ ,$$

c'est-à-dire,

$$(2\text{Cos.}x)^m=X\frac{\text{Cos}\,mk\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}mk\varpi}{\text{Cos.}mk\varpi}=X\frac{(\text{Cos}\,k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}k\varpi)^m}{\text{Cos.}mk\varpi}\ ;$$

et on trouve aussi, d'après cela,

$$(2\text{Cos.}x)^m=-X'\frac{(\text{Cos.}k\varpi+\sqrt{-1}\text{Sin.}k\varpi)^m}{\text{Sin.}mk\varpi}\ .$$

Ces deux formules, qu'on peut regarder comme fondamentales, s'accordent avec celles de M. Poinsot, et se prêtent à tous les développemens qu'il a donnés à l'article de l'examen de l'analise d'Euler (*Recherches sur l'analise des sections angulaires*, pag. 68).

Les géomètres qui se sont occupés de ce sujet dans les *Annales* (*) se sont principalement attachés, pour la plupart, à produire

---

(*) M. Pagani Michel, tom. XIII, pag. 94, M. Crelle, même volume, pag. 213, et M. Stein, tom. XV, pag. 150.

au jour les n valeurs de la formule $X+X'\sqrt{-1}$; mais la transformation qui réduit l'expression à ne contenir que l'une ou l'autre des deux fonctions X et X' entrait bien aussi un peu dans la question, et pourtant aucun d'eux ne s'en est occupé. On peut être surpris qu'elle soit échappée, en particulier à M. Crelle, qui a traité ce sujet avec le plus de profondeur et de développement, et qui paraissait destiner ce qu'il avait écrit sur ce sujet à servir de commentaire à une traduction allemande du *Calcul des fonctions* qu'il préparait.

Ceci explique, entr'autres, pourquoi l'équation différentielle de Lagrange admet les deux solutions qui étaient pour M. Lacroix une source d'embarras (*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tom. III, pag. 616).

Du reste cette relation entre X et X' se trouve aux notations près, dans le mémoire de M. Poinsot ; mais la manière dont elle s'y trouve amenée et les nombreux détails au milieu desquels elle se trouve absorbée permettent à peine de l'apercevoir.