
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

**Questions résolues. Démonstration du théorème d'analyse
énoncé à la page 64 du présent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 263-264

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__263_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1825-1826, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analyse énoncé à la page 64 du présent volume ;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole royale polytechnique (*).

SOIENT $p+q$ boules contenues dans une urne de laquelle il faille en extraire un nombre p ou un nombre q ; cette extraction pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{p+q}{1} \cdot \frac{p+q-1}{2} \cdot \frac{p+q-2}{3} \dots \frac{p+1}{q} = \frac{p+q}{1} \cdot \frac{p+q-1}{2} \cdot \frac{p+q-2}{3} \dots \frac{q+1}{p}$$

dre par rapport à x l'une ou l'autre des équations $x^n=a^m$ et $x^{np}=a^{mp}$. Or la seconde peut être mise sous cette forme

$$(x^n-a^m)[x^{n(p-1)}+a^m x^{n(p-2)}+\dots+a^{m(p-1)}x^n+a^{m(p-1)}]=0$$

et dès lors il paraît manifeste qu'elle donne d'abord les mêmes valeurs de x qu'on tire de la première et en outre toutes celles qu'on déduira de l'égalité du second facteur à zéro. La seconde est donc plus étendue que la première ; elles ne sont donc pas identiquement les mêmes ; elles ne sauraient donc impunément être substituées l'une à l'autre ; et il doit en être de même des expressions $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{mp}{n}}$. On ne saurait donc se permettre, sans dénaturer une quantité à exposant fractionnaire, de multiplier ou de diviser les deux termes de cet exposant par un même nombre entier.

J. D. G.

(*) A la page 120 du présent volume, M. Lenthéric a déduit très-simplement la démonstration de ce théorème d'un beau théorème de M. Ampère ; mais nous avons pensé que le lecteur ne serait pas fâché d'en avoir une démonstration directe ; et, parmi plusieurs qui nous sont parvenues, nous avons cru devoir distinguer celle-ci qui, en même temps qu'elle n'exige aucun calcul, ouvre une voie pour découvrir facilement beaucoup d'autres théorèmes du même genre.

J. D. G.

Supposons présentement que, sur ces $p+q$ boules, il s'en trouve p blanches et q noires, et que p soit le nombre qu'il en faut extraire, elles pourront être toutes blanches, ou bien il y en aura $p-1$ blanches et 1 noire, ou $p-2$ blanches et 2 noires ou $p-3$ blanches et 3 noires, et ainsi de suite, jusqu'à 3 blanches et $p-3$ noires, ou 2 blanches et $p-2$ noires, ou 1 blanche et $p-1$ noires, ou enfin elles pourront toutes être noires, si du moins q n'est pas moindre que p .

Or les divers nombres de manières dont ces divers genres d'extractions peuvent être faits sont tels qu'on le voit dans le tableau suivant :

p blanches et 0 noires, de 1 manière ;

$p-1$ blanches et 1 noire, de $\frac{p}{1} \cdot \frac{q}{1}$ manières ;

$p-2$ blanches et 2 noires, de $\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{p-1}{2}$ manières ;

$p-3$ blanches et 3 noires, de $\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q-2}{3}$ manières ;

.....

d'où l'on voit que le nombre des manières différentes d'extraire p boules de l'urne pourra aussi être exprimé par

$$1 + \frac{p}{1} \cdot \frac{q}{1} + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{q-1}{2} + \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q-2}{3} + \dots$$

Il sera donc permis d'égaliser cette expression à l'une ou à l'autre des deux expressions ci-dessus, et de cette égalité résultera le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Si, en particulier, on suppose $q=p$, on obtiendra ce résultat remarquable

$$1 + \left(\frac{p}{1}\right)^2 + \left(\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3}\right)^2 + \dots = \frac{2p}{1} \cdot \frac{2p-1}{2} \cdot \frac{2p-2}{3} \cdot \frac{2p-3}{4} \dots$$