ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

C. C. GERONO

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes de géométrie, énoncés à la page 244 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 26-31
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__26_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1825-1826, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie, énoncés à la page 244 du précédent volume;

Par M. C. C. Gerono.

Problème. *A un cercle donné inscrire ou circonscrire un triangle, dont les trois côtés forment une proportion continue, par différence ou par quotient, dont la raison soit donnée?*

Cet énoncé renferme évidemment quatre problèmes que nous allons traiter successivement.

I. *Triangle inscrit.*

Soit R le rayon d'un cercle auquel on propose d'inscrire un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue. Soient x, y, z les trois côtés du triangle, en désignant par T l'aire de ce triangle, on aura

$$16T^2=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\ ;$$

mais d'un autre côté on sait que

$$R=\frac{xyz}{4T}\ ,\qquad \text{d'où}\qquad 16\ T^2R^2=x^2y^2z^2\ ;$$

donc en substituant

$$R^2(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=x^2y^2z^2. \quad (1)$$

Cela posé, 1.° si les trois côtés doivent former une proportion continue par différences, en désignant par d la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=y-d \qquad z=y+d\,;$$

ce qui donnera, en substituant et réduisant,

$$3R^2(y^2-4d^2)=(y^2-d^2)^2\;;$$

ou bien

$$y^4-(2d^2+3R^2)y^2+d^2(d^2+12R^2)=0\;;$$

d'où l'on voit que, si le problème est possible, il admettra deux solutions. On tire de là

$$y=\sqrt{\frac{2d^2+3R^2\pm 3R\sqrt{R^2-4d^2}}{2}}\;;$$

de sorte que le problème ne sera possible qu'autant que la raison d n'excédera pas la moitié du rayon du cercle donné.

Le côté y étant déterminé par cette formule facile à construire, on en conclura $x=y-d$ et $z=y+d$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

2.° Si les trois côtés doivent former une proportion continue par quotiens, en désignant par q la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=\frac{y}{q} \qquad z=qy$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation (1) et réduisant

$$R^2(1+q+q^2)(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)=q^4y^4\ ;$$

d'où

$$y=\frac{R}{q^2}\sqrt{(1+q+q^2)(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)}\ ;$$

d'où l'on voit que le problème est toujours possible, et n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y, on conclura celles de $x=\frac{y}{q}$ et de $z=qy$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

II. *Triangle circonscrit.*

Soit r le rayon d'un cercle, auquel on propose de circonscrire un triangle dont les trois côtés forment une proportion continue. Soient x, y, z les trois côtés du triangle ; en désignant par T, comme ci-dessus, l'aire de ce triangle, on aura

$$16T^2=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\ ;$$

mais, d'un autre côté on sait que

$$2T=r(x+y+z) \quad \text{d'où} \quad 4T^2=r^2(x+y+z)^2\ ;$$

donc, en substituant

$$4r^2(x+y+z)=(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\ . \quad (2)$$

Cela posé, 1.° si les trois côtés doivent former une proportion continue par différences, en désignant par d la raison donnée de cette progression, on aura

$$x=y-d\ , \qquad z=y+d\ ;$$

ce qui donnera, en substituant et réduisant

$$12r^2=(y+2d)(y-2d)=y^2-4d^2$$

et par suite

$$y=2\sqrt{d^2+3r^2}\ ;$$

quantité facile à construire, si l'on remarque que $3r^2$ est le quarré de la corde du tiers de la circonférence. On voit que le problème, toujours possible, n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y on conclura celles de $x=y-d$ et de $z=y+d$; et la solution du problème s'achevera sans difficulté.

2.° Si les trois côtés doivent former une proportion continue par quotiens; en désignant par q la raison de cette progression, on aura

$$x=\frac{y}{q}\ ,\qquad z=qy\ ,$$

ce qui donnera, en substituant dans (2) et réduisant,

$$4q^2r^2(1+q+q^2)=(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)y^2\ ;$$

et conséquemment

$$y=2qr\sqrt{\frac{1+q+q^2}{(1+q-q^2)(1+q^2-q)(q^2+q-1)}}\ .$$

On voit que le problème, toujours possible, n'admet qu'une solution unique.

De la valeur de y, on conclura celles de $x=\frac{y}{q}$ et de $z=qy$: et la solution du problême s'achevera sans difficulté.

Démonstration du théorème de Statique énoncé à la page 272 du présent volume ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professseur au collége royal de Montpellier,
M. Sarrus, docteur ès sciences, professeur au collége de Pézenas,
M. A. E. Morel, capitaine au corps royal d'artillerie,
Et M. Querret, professeur de mathématiques transcendantes à la faculté des sciences de Montpellier.

THÉORÈME. *Si des forces, au nombre de* n, *agissant sur un même point* O *de l'espace, sont représentées, en intensité et en direction, par des droites* OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_n, *issues de ce point, le centre* M *des moyennes distances des points* P_1, P_2, P_3, ...P_n *sera un des points de la résultante de ces forces ; et, si cette résultante est représentée en intensité et en direction par* OR, *on aura* $OR=n\times OM$.

Démonstration. Trois des démonstrations que nous avons reçues se ressemblent pour le fond. Dans toutes on a rapporté le système à trois axes rectangulaires passant par le point O ; seulement M. Sarrus a fait passer l'axe des z par le point M ; et, comme il en résulte quelques simplifications, nous adopterons un pareil choix d'axes de coordonnées.

Soient alors (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... (x_n, y_n, z_n) les points que nous avons désignés par P_1, P_2, ... P_n ; on aura d'après la situation de l'axe des z

$$x_1+x_2+x_3+ \dots\dots +x_n=0\ ,$$
$$y_1+y_2+y_3+ \dots\dots +y_n=0\ ,$$
$$z_1+z_2+z_3+ \dots\dots +z_n=n.OM.$$

Soient ensuite X, Y, Z les coordonnées du point R : si l'on décompose la résultante OR suivant les trois axes, X, Y, Z en seront les composantes, et l'on devra avoir

$$X=x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_n\,,$$
$$Y=y_1+y_2+y_3+\dots\dots+y_n\,,$$
$$Z=z_1+z_2+z_3+\dots\dots+z_n\,;$$

on aura donc aussi

$$X=0\,,\qquad Y=0\,;\qquad Z=n.\mathrm{OM}$$

la résultante OR est donc dans l'axe des z, et passe ainsi par le point M; et l'on a de plus $\mathrm{OR}=z=n.\mathrm{OM}$ (*).

M. Lenthéric observe, comme l'avait déjà fait M. Gerono à qui l'on doit le théorème que, quelle que soit la position du point O, dans l'espace, la résultante OR passera toujours par le même point M.

Il remarque encore que, si l'on a un tétraèdre OABC, et qu'on joigne par une droite OM le point O avec le centre M des moyennes distances des trois points A, B, C, la longueur OM sera dirigée suivant la diagonale OR du parallélipipède construit sur OA, OB, OC, et sera le tiers de la sienne.

M. Querret a suivi un autre tour de démonstration. Il remarque d'abord que, dans le cas de deux forces, la vérité du théorème est manifeste, puisqu'il n'est alors que le principe du parallélogramme, énoncé sous une autre forme. Il démontre ensuite que, si ce théorème est vrai pour n force, il sera vrai encore en introduisant une nouvelle force dans le système, ce qui est également sans difficulté, et il en conclut que ce théorème est vrai quel que soit le nombre des forces.

(*) Voyez aussi la page 314 du précédent volume.

J. D. G.