FERRIOT

Géométrie des courbes. Théorèmes sur l'ellipse

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 373-376
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__373_0>

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Théorèmes sur l'ellipse ;

Par M. FERRIOT, Doyen de la Faculté des sciences de Grénoble.

THÉORÈME I. *Dans tout parallélogramme circonscrit à une ellipse, les diagonales se coupent au centre et suivent les directions de deux diamètres conjugués.*

Démonstration. L'ellipse dont il s'agit peut toujours être projetée orthogonalement sur un plan tellement situé que sa projection soit un cercle, et il est visible que le centre de ce cercle sera la projection du centre de la courbe. La projection du parallélogramme sera un parallélogramme circonscrit au cercle, et conséquemment un rhombe, dont les deux diagonales, projections des deux diagonales du parallélogramme circonscrit à l'ellipse, se couperont perpendiculairement au centre de ce cercle, dont elles seront conséquemment deux diamètres conjugués ; donc les diagonales de l'ellipse, dont elles seront les projections, en seront aussi deux diamètres conjugués.

Corollaire. Il suit de là que le lieu des sommets de tous les rectangles circonscrits à une ellipse est la circonférence d'un cercle de même centre que cette ellipse.

Considérons en effet un de ces rectangles. Prenons les directions de ses diagonales, que nous venons de voir être celles de deux diamètres conjugués, pour celles des axes des coordonnées et représentons par $2a$ et $2b$ les longueurs de ces deux diamètres, l'équation de la courbe sera conséquemment

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Soit (x',y') le point de contact de l'ellipse avec un des côtés du rectangle, de manière qu'on ait

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2\ ; \qquad (1)$$

ce côté déterminera, sur les axes des coordonnées, des segmens égaux entre eux et à la moitié de la diagonale du rectangle ; et, en représentant par r la longueur de cette demi-diagonale, on aura, par les principes connus sur les sous-tangentes,

$$r=\frac{a^2}{x'}=\frac{b^2}{y'},$$

d'où

$$x'=\frac{a^2}{r},\quad y'=\frac{b^2}{r},$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) et réduisant, on en tirera

$$a^2+b^2=r^2\ ;$$

or, le premier membre de cette dernière équation est constant, quel que soit le rectangle circonscrit ; donc le second l'est aussi ; donc tous les rectangles circonscrits à une même ellipse ont leurs diagonales de même longueur ; donc ils ont tous leurs sommets sur une même circonférence qui a son centre au centre même de l'ellipse.

THÉORÈME II. L'ellipse est toujours partagée en quatre portions *équivalentes, par un système quelconque de diamètres conjugués.*

Démonstration. Concevons une ellipse divisée en quatre portions par deux diamètres conjugués quelconques, et soit projetée orthogonalement cette ellipse sur un plan tellement situé par rapport au sien que la projection soit un cercle; les projections de ses diamètres conjugués seront deux diamètres de ce cercle se coupant à angles droits et divisant conséquemment sa surface en quatre parties égales; mais les quatre portions correspondantes de l'ellipse auront pour mesure ces mêmes parties divisées par le cosinus de l'angle des deux plans; donc en effet, ces quatre portions sont équivalentes.

THÉORÈME III. *Le lieu des sommets de tous les parallélogrammes conjugués circonscrits à une même ellipse est une autre ellipse concentrique à la première, qui lui est semblable et qui est semblablement située.*

Démonstration. Soit projetée orthogonalement l'ellipse, avec tous ses parallélogrammes conjugués circonscrits, sur un plan tellement situé par rapport au sien que la projection soit un cercle; les projections des parallélogrammes conjugués seront des quarrés circonscrits à ce cercle lesquels auront conséquement leurs sommets sur un autre cercle concentrique à celui-là. Les projections de l'ellipse et du lieu des sommets des parallélogrammes conjugués sont donc deux cercles concentriques; ce lieu est donc une autre ellipse concentrique à la première, semblable à elle et semblablement située sur son plan.

THÉORÈME IV. *Si deux ellipses tracées sur un même plan, sont à la fois concentriques, semblables et semblablement situées sur ce plan, toute corde de la plus grande tangente à la plus petite la touchera au milieu de sa longueur.*

Démonstration. On pourra toujours, en effet, projeter orthogonalement la figure sur un plan tel que sa projection soit le système de deux cercles concentriques; et la proposition étant évidemment vraie pour la projection de la corde, elle devra l'être aussi pour cette corde elle-même (*).

(*) Ceci peut être considéré comme faisant suite à un autre article de M. Ferriot inséré à la page 240 du II.e volume du présent recueil.

J. D. G.