ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposes à la page 76 du precédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 380-385
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__380_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 76 du précédent volume;

Par M. ***

PROBLÈME. *Les propriétés caractéristiques de la sphère sont 1.° que toutes celles de ses cordes qui passent par un certain point fixe y ont leur milieu; 2.° que ces cordes sont toutes d'une même longueur. Les surfaces qui jouissent de la première de ces proprié-*

tès sont les surfaces qui ont un centre, et dont il est facile d'obtenir l'équation générale. On propose de donner également l'équation générale des surfaces qui jouissent de la dernière propriété sans jouir de la première ?

Solution. Soient P le point donné et $2r$ la longueur commune que doivent avoir toutes les cordes qui concourront en ce point. Concevons dans l'espace une surface courbe, tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue. De l'un quelconque C des points de cette surface soit menée une droite au point P, et faisons du même point le centre d'une sphère ayant un rayon égal à r, cette sphère sera percée par la droite PC en deux points appartenant à deux nappes de la surface cherchée, laquelle sera continue ou discontinue suivant la nature du lieu des points C.

Imitons ce procédé par l'analise. Soit pris le point P pour origine des coordonnées rectangulaires, et soit alors

$$z=\mathrm{f}(x,y)\,, \qquad (1)$$

l'équation de la snrface lieu des points C; les équations de l'une quelconque des droites PC seront

$$x=Az\,, \qquad y=Bz\,, \qquad (2)$$

A et B étant deux indéterminées; et, en combinant entre elles les équations (1,2), on en tirera pour le point C des équations de la forme

$$x=A\varphi(A,B)\,, \qquad y=\varphi B(A,B)\,, \qquad z=\varphi(A,B)\,. \quad (3)$$

La sphère qui aura ce point pour centre et un rayon égal à r aura pour équation

$$\{x-A\varphi(A,B)\}^2+\{y-B\varphi(A,B)\}^2+\{z-\varphi(A,B)\}^2=r^2\,. \quad (4)$$

En combinant donc cette dernière éqation, pour chaque système de valeurs de A et B, avec les équations (2), on obtiendrait, tour-à-tour, tous les points des deux nappes de la surface cherchée. Pour obtenir donc l'équation générale de cette surface, il n'est question que d'éliminer A et B entre ces mêmes équations, ce qui donnera

$$\left\{x-\frac{x}{z}\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{h}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{z}\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2+\left\{z-\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2=r^2$$

ou bien

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{z-\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right\}^2=r^2z^2, \qquad (5)$$

qui est conséquemment l'équation demandée.

Nous avons supposé que la fonction f était donnée, et nous venons de voir que la fonction φ s'en déduit en résolvant par rapport à z l'équation

$$z=\mathrm{f}(Az,Bz).$$

Si, au contraire, la fonction φ étant donnée, on veut en déduire la fonction f, on y parviendra en résolvant par rapport à la même variable l'équation

$$z=\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right).$$

La question que nous venons de résoudre est exactement, pour la géométrie à trois dimensions, ce qu'est, pour la géométrie plane, celle qui a été traitée par M. Jouvin (*Annales*, tom I., pag. 124).

Démonstration du théorème d'analise énoncé à la page 164 du précédent volume;

Par un Abonné.

THÉORÈME. *Si, dans une équation de degré quelconque, les cœfficiens p, q, r, s de quatre termes consécutifs sont tels que le pro-*

duit $(q^2-pr)(r^2-qs)$ *soit nul ou négatif, cette équation aura nécessairement deux racines imaginaires, au moins; et, si une pareille relation a lieu pour plusieurs séries de quatre termes consécutifs, l'équation aura autant de couples de racines imaginaires, au moins qu'elle offrira de pareilles séries.*

Démonstration. Il est connu qu'une équation ne saurait avoir plus de *racines positives* que de *variations* de signes, ni plus de *racines négatives* que de *permanences* de signes.

Il suit de là que si, dans une équation, il manque un terme entre deux termes de même signe, cette équation aura deux racines imaginaires, au moins. Soient, en effet, v le nombre de ses variations et p le nombre de ses permanences, de part et d'autre du terme qui manque, m étant le degré de l'équation; on devra avoir $v+p=m-2$. En rétablissant le terme qui manque, avec le coefficient zéro affecté du même signe que portent les deux termes qui le comprennent, ce qui est permis, l'équation n'ayant dès lors que v variations, on sera en droit d'en conclure qu'elle n'a pas plus de v racines réelles positives. Si, au contraire, on rétablit ce même terme, en donnant à son coefficient zéro un signe contraire au signe commun des deux termes qui le comprennent, ce qui est également permis, l'équation n'ayant toujours que p permanences, on sera en droit d'en conclure qu'elle n'a pas plus de p racines réelles négatives. Une telle équation n'a donc au plus que $v+p$ ou $m-2$ racines réelles; elle a donc deux racines imaginaires, au moins.

Le même raisonnement prouve qu'autant de fois il manquera un terme entre deux autres de même signe, autant l'équation aura de couples de racines imaginaires, au moins.

Il suit de là qu'une équation dans laquelle il manque deux termes consécutifs a au moins deux racines imaginaires; car alors on peut toujours rétablir le terme qui manque de manière à faire manquer l'autre entre deux termes de mêmes signes On voit même qu'autant de fois il manquera deux termes consécutifs, entre deux termes effectifs, autant l'équation aura de couples de racines imaginaires, au moins.

Il est évident d'ailleurs que l'introduction ou la suppression d'une racine réelle, dans une équation, ne saurait modifier en aucune sorte le nombre de ses racines imaginaires.

Cela posé, soit

$$px^{n+1}+qx^{n}+rx^{n-1}+sx^{n-2}$$

une portion d'une équation de degré quelconque, si on y introduit une racine réelle indéterminée $-A$, en multipliant son premier membre par $x+A$, trois termes consécutifs de l'équation résultante seront

$$(q+pA)x^{n+1}+(r+qA)x^{n}+(s+rA)x^{n-1} .$$

Or, d'après ce qui a été dit plus haut, si l'on peut disposer de A de manière à avoir à la fois

$$q+pA=0 , \qquad r+qA=0 ;$$

ou bien

$$r+qA=0 , \qquad s+rA=0 ;$$

ce qui exige qu'on ait

$$q^2-pr=0 , \qquad \text{ou} \qquad r^2-qs=0 ,$$

l'équation aura deux racines imaginaires.

Mais quand bien même aucune de ces deux conditions ne pourrait être remplie, pourvu qu'en déterminant A par la condition

$$r+qA=0 , \quad \text{qui donne} \quad A=-\frac{r}{q} ,$$

il en résulte pour $q+pA$ et $s+rA$ des valeurs de mêmes signes, c'est-à-dire, des valeurs telles qu'on ait

$$(q+pA)(s+rA)>0 ,$$

l'équation aura également deux racines imaginaires, au moins;

or, en mettant pour A sa valeur dans cette inégalité, on trouve

$$\left(q-\frac{pr}{q}\right)\left(s-\frac{r^2}{q}\right)>0\,, \quad \text{ou} \quad \left(q-\frac{pr}{q}\right)\left(\frac{r^2}{q}-s\right)<0\,,$$

ou, en multipliant par q^2

$$(q^2-pr)(r^2-qs)<0\,,$$

comme l'annonce le théorème.

Il résulte de là, en particulier, qu'autant on rencontre, dans une équation, de séries de trois termes formant une proportion continue par quotiens, autant l'équation a de couples de racines imaginaires au moins (*).

(*) Le théorème qui vient d'être démontré, et beaucoup d'autres du même genre, font le sujet d'un mémoire de M. de Lavernède, dont on trouve l'extrait dans le volume de l'*Académie du Gard*, pour 1809.

J. D. G.