LENTHÉRIC

Trigonométrie. Recherches sur les sommes de puissances semblables des sinus et cosinus des divisions de la circonférence

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 39-45
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__39_1>

TRIGONOMÉTRIE.

Recherches sur les sommes de puissances semblables des sinus et cosinus des divisions de la circonférence ;

Par M. LENTHÉRIC, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

On sait que, k étant un nombre entier positif quelconque, on a

$$\left(\text{Cos.}\frac{2k\varpi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2k\varpi}{m}\right)^m=\text{Cos}\,2k\varpi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}2k\varpi=1\ ;$$

d'où il suit que les m racines de l'équation $x^m-1=0$ sont

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{Cos.}\frac{2\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{2\varpi}{m}\,,\\
\operatorname{Cos.}\frac{4\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{4\varpi}{m}\,,\\
\operatorname{Cos.}\frac{6\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{6\varpi}{m}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\operatorname{Cos.}\frac{2m\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{2m\varpi}{m}\,,
\end{array}\right\}\quad(1)$$

donc, en vertu du même théorème, les $n.^{me}$ puissances de ces racines seront respectivement

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{Cos.}\frac{2n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{2n\varpi}{m}\,,\\
\operatorname{Cos.}\frac{4n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{4n\varpi}{m}\,,\\
\operatorname{Cos.}\frac{6n\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{6n\varpi}{m}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\operatorname{Cos.}\frac{2mn\varpi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin.}\frac{2mn\varpi}{m}\,.
\end{array}\right\}\quad(2)$$

Mais, d'un autre côté, le théorème de Newton sur les sommes de puissances semblables des racines d'une équation quelconque, prouve que la somme des $n.^{me}$ puissances des racines de l'équation $x^m-1=0$ est égale à m, ou nulle, suivant que n est ou n'est pas multiple de m; donc, en supposant $n<m$, la somme des fonctions (2) doit être nulle, et conséquemment la partie réelle et la

partie imaginaire de cette somme doivent séparément s'anéantir. On a donc, pour $n<m$,

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}.\frac{n}{m}.2\omega+\mathrm{Cos}.2\frac{n}{m}.2\omega+\mathrm{Cos}.3\frac{n}{m}.2\omega+.....+\mathrm{Cos}.m.\frac{n}{m}.2\omega=0\ ,\\ \mathrm{Sin}.\frac{n}{m}.2\omega+\mathrm{Sin}.2\frac{n}{m}.2\omega+\mathrm{Sin}.3\frac{n}{m}.2\omega+....+\mathrm{Sin}.m.\frac{n}{m}.2\omega=0\ ;\end{array}\right\}\ (3)$$

c'est-à-dire,

La somme soit des sinus soit des cosinus de tous les multiples d'une fraction quelconque de la circonférence, à partir du sinus ou du cosinus de cet arc lui-même, jusqu'à autant de fois cet arc qu'il y a d'unités dans le dénominateur de la fraction dont il s'agit, est constamment égale à zéro.

Si, en particulier, on avait $n=m$, la somme des sinus serait encore nulle; mais la somme des cosinus serait alors égale à m. C'est d'ailleurs une chose manifeste, puisque chaque sinus serait nul, et chaque cosinus égal à l'unité.

On sait que, p étant un nombre entier positif quelconque on a

$$\mathrm{Cos}.^p x=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\mathrm{Cos}.px+\frac{p}{1}\mathrm{Cos}.(p-2)x+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\mathrm{Cos}.(p-4)x.+.\right\};$$

pourvu que l'on s'arrête dès qu'on ne rencontrera plus d'arcs positifs, et que, quand p sera un nombre pair, on ne prenne que la moitié du terme qui contiendra l'arc nul. De cette formule on conclura, sous les mêmes conditions,

$$\mathrm{Cos}.^p\frac{2\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\mathrm{Cos}.\frac{2p\varpi}{m}+\frac{p}{1}\mathrm{Cos}.\frac{2(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\mathrm{Cos}.\frac{2(p-4)\varpi}{m}+......\right\},$$

$$\mathrm{Cos}.^p\frac{4\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\mathrm{Cos}.\frac{4p\varpi}{m}+\frac{p}{1}\mathrm{Cos}.\frac{4(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}\mathrm{Cos}.\frac{4(p-4)\varpi}{m}+......\right\},$$

$$\text{Cos.}^p\,\frac{6p\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}\,\frac{6p\varpi}{m}+\frac{p}{1}\,\text{Cos.}\,\frac{6(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\,\text{Cos.}\,\frac{6(p-4)\varpi}{m}+\ldots\right\},$$

. . . . ;

$$\text{Cos.}^p\,\frac{2m\varpi}{m}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{\text{Cos.}\,\frac{2mp\varpi}{m}+\frac{p}{1}\,\text{Cos.}\,\frac{2m(p-2)\varpi}{m}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\,\text{Cos.}\,\frac{2m(p-4)\varpi}{m}+\ldots\right\}.$$

En prenant la somme de ces équations, on aura d'abord, par la première des équations (3),

$$\text{Cos.}\,\frac{2p\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{4p\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{6p\varpi}{m}+\ldots\ldots+\text{Cos.}\,\frac{2mp\varpi}{m}=0\,,$$

$$\text{Cos.}\,\frac{2(p-2)\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{4(p-2)\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{6(p-2)\varpi}{m}+\ldots\ldots+\text{Cos.}\,\frac{2m(p-2)\varpi}{m}=0\,,$$

$$\text{Cos.}\,\frac{2(p-4)\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{4(p-4)\varpi}{m}+\text{Cos.}\,\frac{6(p-4)\varpi}{m}+\ldots\ldots+\text{Cos.}\,\frac{2m(p-4)\varpi}{m}=0\,,$$

. . . .

Quant à la somme des derniers termes des seconds membres, il faut distinguer deux cas, 1.° si p est impair, elle sera nulle, comme les autres, et l'on aura conséquemment, en changeant p en $2n+1$,

$$\left(\text{Cos.}\,\frac{2\varpi}{m}\right)^{2n+1}+\left(\text{Cos.}\,\frac{4\varpi}{m}\right)^{2n+1}+\left(\text{Cos.}\,\frac{6\varpi}{m}\right)^{2n+1}+\ldots\ldots+\left(\text{Cos.}\,\frac{2m\varpi}{m}\right)^{2n+1}=0\,; \qquad (4)$$

c'est-à-dire,

Si, ayant divisé une circonférence en un nombre quelconque de parties égales, on abaisse de tous les points de division des perpendiculaires sur un diamètre mené par l'un d'eux; la somme des puissances impaires d'un même degré quelconque des distances du centre aux pieds de ces perpendiculaires, prises avec leurs signes, sera égale à zéro.

2.° Si, au contraire, p est un nombre pair, les derniers cosinus seront égaux à l'unité et auront pour coefficient commun

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdots\cdots\frac{p-\frac{p-2}{2}}{\frac{p}{2}};$$

ou, en changeant p en $2n$

$$\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n};$$

il faudra donc prendre m fois la moitié de l'un de ces coefficiens et multiplier le résultat par $\frac{1}{2^{p-1}}$ ou $\frac{1}{2^{2n-1}}$; ce qui reviendra à multiplier de suite ce coefficient par $\frac{m}{2^{2n}}$; on aura donc

$$\left(2\mathrm{Cos.}\frac{2\varpi}{m}\right)^{2n}+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{4\varpi}{m}\right)^{2n}+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{6\varpi}{m}\right)^{2n}+\ldots+\left(2\mathrm{Cos.}\frac{2m\varpi}{m}\right)^{2n}=m.\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}; \quad (5)$$

c'est-à-dire,

Si, ayant divisé une circonférence en un nombre quelconque de parties égales, on abaisse de tous les points de division des perpendiculaires sur un diamètre mené par l'un d'eux; la somme des puissances paires d'un même degré quelconque des doubles des distances du centre aux pieds de ces perpendiculaires sera égale à la même puissance du rayon, prise autant de fois que la circonférence aura de points de division et multipliée ensuite par autant d'unités qu'on peut faire de produits différens de moitié moins de facteurs qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, avec autant de facteurs que cet exposant a d'unités.

On sait aussi que, quel que soit x, on a

$$\left(\text{Sin}.x\right)^{4n} = +\frac{1}{2^{4n-1}}\left\{\text{Cos}.4nx - \frac{4n}{1}\text{Cos}.(4n-2)x + \frac{4n}{1}.\frac{4n-1}{2}\text{Cos}.(4n-4)x - \ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin}.x\right)^{4n+1} = +\frac{1}{2^{4n}}\left\{\text{Sin}.(4n+1)x - \frac{4n+1}{1}\text{Sin}.(4n-1)x + \frac{4n+1}{1}.\frac{4n}{2}\text{Sin}.(4n-3)x - \ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin}.x\right)^{4n+2} = -\frac{1}{2^{4n+1}}\left\{\text{Cos}.(4n+2)x - \frac{4n+2}{1}\text{Cos}.4nx + \frac{4n+2}{1}.\frac{4n+1}{2}\text{Cos}.(4n-2)x - \ldots\ldots\right\},$$

$$\left(\text{Sin}.x\right)^{4n+3} = -\frac{1}{2^{4n+2}}\left\{\text{Sin}.(4n+3)x - \frac{4n+3}{1}\text{Sin}.(4n+1)x + \frac{4n+3}{1}.\frac{4n+2}{2}\text{Sin}.(4n-1)x - \ldots\ldots\right\};$$

pourvu qu'encore ici on arrête le développement dès qu'on aura plus d'arcs positifs, et que, dans les première et troisième formules, on ne prenne que la moitié du terme qui contient le cosinus de l'arc nul.

Si, dans chacune de ces formules, on substitue successivement pour x, comme ci-dessus, les arcs

$$\frac{2\varpi}{m}, \quad \frac{4\varpi}{m}, \quad \frac{6\varpi}{m}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2m\varpi}{m},$$

et qu'en ayant égard aux formules (3) on prenne la somme des équations résultantes, on s'assurera que

$$\left(\text{Sin}.\frac{2\varpi}{m}\right)^{2n+1} + \left(\text{Sin}.\frac{4\varpi}{m}\right)^{2n+1} + \left(\text{Sin}.\frac{6\varpi}{m}\right)^{2n+1} + \ldots\ldots + \left(\text{Sin}.\frac{2m\varpi}{m}\right)^{2n+1} = 0. \qquad (6)$$

et que

$$\left(2\text{Sin}.\frac{2\varpi}{m}\right)^{2n} + \left(2\text{Sin}.\frac{4\varpi}{m}\right)^{2n} + \left(2\text{Sin}.\frac{6\varpi}{m}\right)^{2n} + \ldots\ldots + \left(2\text{Sin}.\frac{2m\varpi}{m}\right)^{2n} = m.\frac{2n}{1}.\frac{2n-1}{2}\ldots\frac{n+1}{n}. \qquad (7)$$

ce qui revient à dire que *les deux théorèmes démontrés ci-dessus subsistent encore, en substituant aux distances du centre aux pieds des perpendiculaires les longueurs même de ces perpendiculaires.* La chose était manifeste pour le cas où m est multiple de quatre, puisque les perpendiculaires ne sont que les distances du centre aux pieds des perpendiculaires abaissées des points de division sur un diamètre perpendiculaire au premier, lequel passe aussi alors par un point de division; mais elle avait besoin d'être directement établie pour les autres valeurs de m.