ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Analise algébrique. Essai sur les limites des racines des équations littérales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 54-61
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__54_1>

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Essai sur les limites des racines des équations littérales;

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

Les analistes ont donné des méthodes diverses à l'aide desquelles on détermine les limites des racines réelles des équations numériques; mais il n'est pas à notre connaissance qu'aucun d'eux se soit occupé du même problème relativement aux équations littéra-

---

rème. Ce n'est pas là, au surplus, le seul côté par lequel les élémens pourraient être améliorés. Mais on trouve plus court et plus commode de calquer à peu près les traités élémentaires les uns sur les autres; et voilà pourquoi, tandis que tant d'autres branches de la science s'étendent et se simplifient sans cesse, les traités élémentaires de géométrie sont encore aujourd'hui à peu près tels qu'ils étaient au temps d'Euclide.

J. D. G.

les. Nous allons montrer comment il peut être résolu pour ces dernières, du moins lorsqu'elles sont d'un degré impair, ou, lorsqu'étant d'un degré pair, elles ont leur dernier terme négatif.

§. I.

Equations de degrés impairs.

Soit l'équation du 3.^{me} degré, sans second terme;

$$x^3+px+q=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^3+px+q=3P(x+a)^2, \qquad (2)$$

a et P étant deux indéterminées. Il est clair que, quelles que soient a et P, toute valeur de x qui satisfera à l'équation (2), substituée dans le premier membre de (1) donnera un résultat de même signe que P; de sorte que toute valeur réelle de x, dans (1), est nécessairement comprise, quelle que soit a, entre deux valeurs de x dans (2) répondant à des valeurs de P de signes contraires. Tout se réduit donc à profiter de l'indétermination de a, pour rendre cette équation (2) facilement résoluble.

En développant, transposant et ordonnant, elle devient

$$x^3-3Px^2+(p-6aP)x-(3a^2P-q)=0. \qquad (3)$$

Or, si l'on pose

$$p-6aP=3P^2, \qquad \text{d'où} \qquad a=\frac{3P^2+p}{6P};$$

cette équation devient

$$(x-P)^3+(P^3-3a^2P+q)=0,$$

ou, en mettant pour a sa valeur,

$$(x-P)^3+\frac{3P^4-6pP^2+12qP-p^2}{12P}=0\ ;$$

ce qui donne, sur-le-champ,

$$x=P-\sqrt[3]{\frac{3P^4-6pP^2+12qP-p^2}{12P}}. \qquad (4)$$

En changeant P en $-P'$, cette formule devient

$$x=-P'+\sqrt[3]{\frac{3P'^4-6pP'^2-12qP'-p^2}{12P'}}. \qquad (5)$$

Ainsi, quelques valeurs positives qu'on prenne pour P et P', les valeurs de x données par les formules (4) et (5), substituées dans le premier membre de l'équation (1), donneront nécessairement des résultats de signes contraires, et comprendront conséquemment entre elles une racine au moins de cette équation.

Soit, en second lieu, l'équation du 5.me degré, sans second terme,

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^5+px^3+qx^2+rx+s=5P(x^2+ax+b)^2+Q(x+c)^2\ ; \qquad (2)$$

P, Q, a, b, c étant indéterminées, et P et Q étant supposés de mêmes signes. Il est clair que toute valeur de x tirée de (2) donnera, par sa substitution dans le premier membre de (1), un résultat de même signe que P et Q; de sorte que toute valeur réelle de x dans (1) sera nécessairement comprise, quelles que soient d'ailleurs a, b, c, entre deux valeurs de x dans (2) répondant à deux systèmes de valeurs de P et Q de signes contraires. Tout se réduit donc à profiter de l'indétermination de a, b, c pour rendre cette équation (2) facilement résoluble.

En développant, transposant et ordonnant, elle devient

$$x^5-5Px^4\begin{array}{r|r|r|r|}-10Pa & x^3-10Pb & x^2-2Qc & x-5Pb^2 \\ +p & -5Pa^2 & -10Pab & -Qc^2 \\ & -Q & +r & +s \\ & +q & & \end{array}=0. \qquad (3)$$

Or, si l'on pose

$$-10Pa+p=10P^2\,,$$

$$-10Pb-5Pa^2-Q+q=-10P^3\,,$$

$$-2Qc-10Pab+r=5P^4\,;$$

ce qui donnera

$$a=\frac{p-10P^2}{10P}\,,$$

$$b=\frac{100P^4+20pP^2-20PQ+20qP-p^2}{200P^2}\,,$$

$$c=\frac{199pP^4-200P^3Q+200qP^3-10(3p^2-20r)P^2+20pPQ-20pqP+p^3}{400P^2Q}\,;$$

elle deviendra

$$(x-P)^5+(P^5-5b^2P-c^2Q+s)=0\,,$$

dans laquelle présentement on peut regarder a, b, c comme connus et qui donne

$$x=P-\sqrt[5]{P^5-5b^2P-c^2Q+s}\,.$$

En donnant donc tour à tour à P et Q, dans cette formule d'abord des valeurs positives quelconques, puis des valeurs négatives également quelconques, les valeurs qui en résulteront pour x, comprendront entre elles une racine, au moins de l'équation proposée.

On voit, par ce qui précède que, dans le 7.$^{\text{me}}$ degré il faudrait poser

$$x^7+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+u$$

$$=7P(x^3+ax^2+bx+c)^2+Q(x^2+dx+e)^2+R(x+f)^2\ ,$$

et supposer que les indéterminées P, Q, R sont toutes trois positives ou toutes trois négatives. On poserait des équations analogues pour les degrés supérieurs.

§. II.

Équations de degrés pairs.

En supposant constamment le dernier terme négatif, soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2+px-q=0\ . \qquad (1)$$

Posons

$$x^2+px-q=(x+a)^2\ , \qquad (2)$$

a étant une indéterminée. Il est clair que toute valeur de x tirée de cette dernière équation et substituée dans le premier membre de (1) donnera un résultat positif; et, comme la valeur o donne le résultat négatif $-q$, il s'ensuit qu'il y aura entre o et la valeur dont il s'agit une racine réelle de l'équation (1).

En développant, transposant et réduisant, l'équation (2) devient

$$(p-2a)x=a^2+q,$$

d'où

$$x=\frac{a^2+q}{p-2a};$$

de sorte que, quelque valeur positive ou négative qu'on donne à l'indéterminée a, une des racines de l'équation (1) sera toujours comprise entre o et la valeur qui en résultera pour x.

Soit, en second lieu, l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^3+qx^2+rx-s=0. \qquad (1)$$

Posons

$$x^4+px^3+qx^2+rx-S=(x^2+ax+b)^2+P(x+c)^2, \qquad (2)$$

a, b, c, P étant des indéterminées. Il est clair que, quels que soient les signes de a, b, c, pourvu qu'on prenne P positif, toute valeur de x tirée de l'équation (2) et substituée dans le premier membre de (1) donnera un résultat positif; et comme, d'un autre côté, la substitution de o dans ce même premier membre donne le résultat négatif $-s$, il s'ensuit que l'équation (1) aura au moins une racine réelle entre o et cette valeur de x.

En développant, transposant, réduisant et ordonnant, l'équation (2) devient

$$\left.\begin{matrix} 2a \\ -p \end{matrix}\right| \begin{matrix} x^3+2b \\ +a^2 \\ +P \\ -q \end{matrix} \left| \begin{matrix} x^2+2Pc \\ +2ab \\ -r \end{matrix} \right| \begin{matrix} x+b^2 \\ +Pc^2 \\ +s \end{matrix} \Bigg| =0 . \qquad (3)$$

En posant

$$2a-p=0 ,$$

$$2b+a^2+P-q=0 ,$$

$$2Pc+2ab-r=0 ;$$

ce qui donne

$$a=\frac{p}{2} ,$$

$$b=-\frac{4P+(p^2-4q)}{8}$$

$$c=\frac{4pP+(p^3-4pq+8r)}{16P}$$

l'équation (3) deviendra simplement

$$(2Pc+2ab-r)x+(b^2+Pc^2+s)=0 ;$$

dans laquelle présentement on peut regarder a , b , c comme connus, et qui donne

$$x=-\frac{b^2+Pc^2+S}{2Pc+2ab-r} .$$

En prenant donc pour P un nombre positif quelconque, il y aura entre o et la valeur qui en résultera pour x une racine au moins de l'équation (1).

On voit, par ce qui précéde, que, pour le sixième degré, il faudrait poser

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx-u$$

$$=(x^3+ax^2+bx+c)^2+P(x^2+dx+e)^2+Q(x+f)^2 ,$$

et supposer positives les deux indéterminées P et Q. On poserait des équations analogues pour les degrés supérieurs.